Теоретический минимум по курсу «Электричество и магнетизм»

Выполнил: Висков Василий

1. ***Дайте определение точечного заряда.***

   Заряженное тело, размеры которого малы по сравнению с расстоянием, на котором рассматривается электростатическое взаимодействие.

2. ***Фундаментальные свойства заряда. Закон сохранения заряда.***

   1) Различают два типа зарядов: положительные и отрицательные. Носителем отрицательного заряда является электрон, положительного – протон. Заряд электрона по абсолютной величине равен заряду протона и составляет элементарный (наименьший возможный) электрический заряд (количественная мера взаимодействия (притяжения и отталкивания) частиц) $e = 1.6 * 10^{-19}$.
   2) ***Инвариантность*** электрического заряда - его величина. Не зависит от выбора СО и скорости движения (релятивистская инвариантность).
   3) ***Дискретность заряда*** - заряд любого тела составляет целое кратное количество от элементарного заряда (иначе это свойство называется «квантуемость»).
   4) ***Аддитивность*** - электрический заряд системы представляет собой алгебраическую сумму зарядов тел, входящих в систему.
   5) **ЗСЗ:** суммарный заряд, находящийся на изолированной системе тел, остается неизменным:

   $$\frac{dQ}{dt} + \oint_s \vec{j}\, d\vec{S} = 0, \text{где } j - \text{плотность тока}$$

   - ЗСЗ в интегральной форме.

   $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\vec{j} = 0, \text{где } \rho - \text{объемная плотность заряда}$$

   - ЗСЗ в дифференциальной форме.

3. ***Сформулируйте закон Кулона.***

Два неподвижных точечных заряда взаимодействуют с силой, прямо пропорциональной величинам зарядов q_1, q_2 и обратно пропорциональной квадрату расстояний r между ними:

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}, \qquad \varepsilon_0 = 8{,}85 * 10^{-12} \frac{\text{Кл}}{\text{Н} * \text{м}^2}$$

Эта сила направлена по прямой, соединяющей заряды, и является силой притяжения для разноименных зарядов и отталкивания для одноименных (вектор $\vec{r}$ направлен в сторону того заряда, для которого рассчитывается сила).

4. ***Дайте определение напряженности электрических полей.***

Векторная величина, равная отношению силы, действующей на точечный заряд, к величине этого заряда:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

Напряженность не зависит от заряда, а определяется величиной и расположением зарядов, действующих на него.

Если заряд Q находится в начале координат, то напряженность электрического поля, создаваемого этим зарядом в произвольной точке, характеризуемой радиус-вектором $\vec{r}$, равна

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon} \frac{\vec{r}}{r^3}$$

5. ***Сформулируйте принцип суперпозиции электрических полей.***

Напряженность электрического поля, создаваемого в любой точке пространства системы зарядов равна векторной сумме напряженностей полей, создаваемых различными зарядами по отдельности (в отсутствие всех остальных).

6. ***Дайте определение потока напряженности электрического поля.***

Поток вектора $\vec{a}$ через любую замкнутую поверхность S:

$$\Phi = \left(\vec{a}, d\vec{S}\right) = |\vec{a}| dS * \cos\left(\vec{a} \wedge \overrightarrow{n_{dS}}\right)$$

Определяется числом линий вектора напряженности $\vec{E}$, пронизывающих некоторую поверхность S. Поток берется со знаком " $-$ ", если силовые линии пронизывают поверхность в обратном к нормали (к поверхности) направлении.

7. ***Сформулируйте электростатическую теорему Гаусса.***

Элементарный поток вектора напряженности $\vec{E}$ через dS:

$$d\Phi = \left(\vec{E}, d\vec{S}\right), d\vec{S} = dS\vec{n}$$

Поток вектора напряженности электрического поля $\vec{E}$ через поверхность S равен сумме свободных зарядов, заключенному в объеме, ограниченном этой поверхностью, деленному на абсолютную диэлектрическую проницаемость вакуума:

$$\Phi = \int_S d\Phi = \int_S \left(\vec{E}, d\vec{S}\right) = \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon_0}$$

- теорема Гаусса в интегральной форме для вектора напряженности $\vec{E}$.

По теореме Остроградского-Гаусса поток вектора $\vec{E}$ через замкнутую поверхность S равен интегралу от его дивергенции по объему, ограниченному этой поверхностью:

$$\int_S \left(\vec{E}, d\vec{S}\right) = \int_V div\vec{E}\, dV$$

Суммарный электрический заряд выражается через объемную плотность заряда ρ:

$$\sum_i q_i = \int_V \rho dV$$

Получим:

$$\mathrm{d}iv\, \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

- теорема Гаусса в дифференциальной форме для вектора напряженности $\vec{E}$.

8. ***Выписать напряженность электростатического поля равномерно заряженных сферы и бесконечной плоскости.***

Сфера:

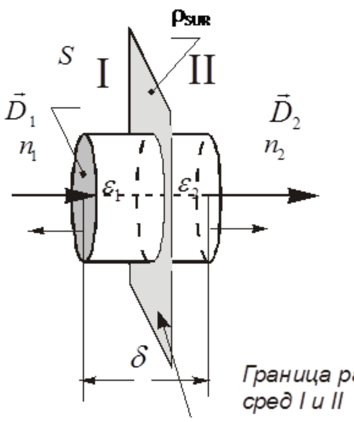
$$\int_S EdS = E\int_S dS = E * 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}, \qquad E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Плоскость:

$$2E\Delta S = \frac{\sigma \Delta S}{\varepsilon_0}, \qquad E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Вычисляется, взяв цилиндр в качестве элементарной поверхности, поток через боковую поверхность равен нулю в силу симметрии относительно любой нормали к плоскости ($\mathrm{E}_n = 0$), для основания же - $E_n = E$.

9. ***Запишите граничные условия для нормальной и тангенциальной составляющих напряженности электрического поля.***



$$\boldsymbol{D_{2n} - D_{1n} = \sigma}, \quad \boldsymbol{\varepsilon_2 E_{2n} - \varepsilon_1 E_{1n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

– для нормальных составляющих электрической индукции, σ – поверхностная плотность заряда ($D = \varepsilon\varepsilon_0 E$);

$$\boldsymbol{\frac{1}{\varepsilon_1} D_{1\tau} - \frac{1}{\varepsilon_2} D_{2\tau} = 0}, \quad \boldsymbol{E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0}$$

– для тангенциальных (касательных) составляющих напряжённости электрического поля

- Если первый диэлектрик заменить проводником

$$\boldsymbol{D_n = \sigma}, \qquad \boldsymbol{E_\tau = 0}$$

Th: $\boldsymbol{E_{1\tau} = E_{2\tau}}$.

■ Рассмотрим контур $ABCD$, симметричный относительно границы раздела двух сред. Циркуляция вектора напряженности вдоль контура:

$$\oint_C Edl = 0 = \int_A^B Edl + \int_B^C Edl + \int_C^D Edl + \int_D^A Edl$$

Ограничения: ширина контура настолько мала, чтобы

$$\int_A^B Edl = \int_C^D Edl = 0$$

Тогда

$$\int_B^C Edl + \int_D^A Edl = 0, E_{2\tau} l_{BC} - E_{1\tau} l_{DA} = 0, \text{но } l_{BC} = -l_{DA} \;\Rightarrow \blacksquare$$

10. *Как связана с плотностью заряда дивергенция вектора напряженности электрического поля.*

По теореме Остроградского-Гаусса поток вектора $\vec{E}$ через замкнутую поверхность S равен интегралу от его дивергенции по объему, ограниченному этой поверхностью:

$$\int_S (\vec{E}, d\vec{S}) = \int_V div\vec{E}\, dV$$

Суммарный электрический заряд выражается через объемную плотность заряда ρ:

$$\sum_i q_i = \int_V \rho dV$$

Получим:

$$\mathrm{d}iv\, \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

- теорема Гаусса в дифференциальной форме для вектора напряженности $\vec{E}$.

11. *Запишите формулы для напряженности электрического поля дискретного и непрерывного распределения заряда.*

Для дискретного распределения зарядов, положение которых в пространстве задается радиус-векторами $\vec{r_i}$, напряженность поля в точке M с радиус-вектором $\vec{r}$ по принципу суперпозиции:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \Sigma_i \vec{E_i}(\vec{r}) = \sum_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r_i}|^3} (\vec{r} - \vec{r_i})$$

Для непрерывного распределения сумма переходит в интеграл по области:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int d\vec{E} = \int_V \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\rho(\vec{\acute{r}})dV}{\left|\vec{r} - \vec{\acute{r}}\right|^3} \left(\vec{r} - \vec{\acute{r}}\right)$$

где ρ — плотность заряда (поверхностная, объемная),

V — рассматриваемая область пространства

(плоскость, часть пространства, возможно, все пространство),

dV — часть области, в которой заряд можно принять за точечный,

$\vec{r}$ — радиус — вектор точки, в которой считается напряженность $\vec{E}$,

$\vec{\acute{r}}$ — радиус — вектор, пробегающий все точки области V при интегрировании.

12. Как определяется потенциал электрического поля.

Потенциал электрического поля в точке M - физическая величина, численно равная отношению работы по перемещению единичного положительного заряда из этой точки в точку O, в которой потенциал принят равным нулю:

$$\varphi = \int_M^O \vec{E}\,\overrightarrow{dr}$$

В силу потенциальности электростатического поля, значение этого интеграла не зависит от выбора траектории интегрирования. Выбор точки O произволен и диктуется соображениями удобства. Обычно за нуль принимают потенциал бесконечно удалённой точки.

13. Запишите формулы для потенциала электрического поля дискретного и непрерывного распределения заряда.

Для дискретного распределения заряда (ограниченной системы зарядов) из принципа суперпозиции и свойства аддитивности интеграла потенциал электрического поля в произвольной точке $M(\vec{r})$:

$$\varphi(\vec{r}) = \int_M^O \vec{E}\,\overrightarrow{dr} = \int_M^O \sum_i \overrightarrow{E_i}\,\overrightarrow{dr} = \sum_i \int_M^O \overrightarrow{E_i}\,\overrightarrow{dr} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \overrightarrow{r_i}|}$$

Для непрерывного распределения заряда аналогично расчету напряженности поля в точке $M(\vec{r})$:

$$\varphi(\vec{r}) = \int d\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{\acute{r}})dV}{|\vec{r} - \vec{\acute{r}}|}$$

14. *Запишите формулу, показывающую локальную связь между потенциалом и напряженностью электрического поля.*

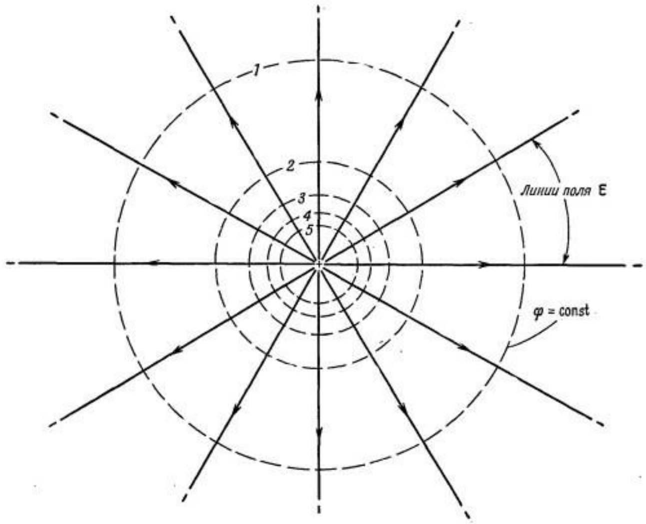
$$\vec{E} = -grad\varphi$$

Вытекает из определения потенциала.

15. *Приведите примеры эквипотенциальных полей.*

т называют поверхности равного потенциала.

Например, в случае точечного заряда эквипотенциальными поверхностями являются поверхности концентрических сфер с центром в точке расположения заряда.



Для однородного поля такого как, например поле между обкладками электрического конденсатора поверхности равного потенциала будут иметь форму плоскостей. Эти плоскости расположены параллельно друг другу на одинаковом расстоянии. Правда, на краях обкладок картина поля исказится вследствие краевого эффекта, но предположим, что обкладки бесконечно длинные.

16. *Что такое электрический диполь. Чему равны потенциал и напряженность поля электрического диполя.*

Электрический диполь – совокупность двух равных по абсолютной величине q разноименных точечных зарядов, расположенных друг от друга на расстоянии l, малом по сравнению с расстоянием до рассматриваемой точки поля.

Потенциал в точке $M(\vec{r})$:

$$\varphi(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right),$$

$$r_+ = \sqrt{r^2 - 2\left(\vec{r}, \frac{\vec{l}}{2}\right) + \frac{l^2}{4}}, \qquad r_- = \sqrt{r^2 + 2\left(\vec{r}, \frac{\vec{l}}{2}\right) + \frac{l^2}{4}}$$

При $r \gg l$:

$$r_+ \approx r - \frac{(\vec{r}, \vec{l})}{2r}, \qquad r_- \approx r + \frac{(\vec{r}, \vec{l})}{2r},$$

$$\varphi\big(M(\vec{r})\big) = \frac{q(\vec{r}, \vec{l})}{4\pi\varepsilon_0} = \frac{(\vec{r}, \overrightarrow{p_e})}{4\pi\varepsilon_0 r^3},$$

$$\overrightarrow{p_e} = q * \vec{l} - \text{дипольный момент диполя.}$$

Напряженность в точке M:

$$\vec{E} = -grad\varphi = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^3} grad(\vec{r}, \overrightarrow{p_e}) - \frac{3(\overrightarrow{p_e}, \vec{r})\vec{r}}{r^4}\right)$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\overrightarrow{p_e}}{r^3} - \frac{3(\overrightarrow{p_e}, \vec{r})\vec{r}}{r^4}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3(\overrightarrow{p_e}, \vec{n})\vec{n} - \overrightarrow{p_e}}{r^3},$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$$

17. *Дайте определение электрического дипольного момента нейтральной системы зарядов.*

Электрический дипольный момент – вектор $\vec{p} = q\vec{l}$, $\vec{l}$ – вектор, проведенный от отрицательного заряда к положительному, q – абсолютная величина зарядов.

Электрический дипольный момент нейтральной системы зарядов – вектор $\vec{P} = \Sigma_i^N q_i \vec{r}$, $\Sigma_i^N q_i = 0$, где $\vec{r_i}$ – радиус-векторы зарядов системы.

$\vec{P}$ не зависит от выбора начала координат.

18. *Чему равна циркуляция вектора напряженности электростатического поля. Приведите доказательство для системы точечных зарядов.*

Циркуляция вектора напряженности – работа, которую совершают электрические силы при перемещении единичного положительного заряда по замкнутому пути L:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l}$$

Так как работа сил электростатического поля по замкнутому контуру равна нулю (работа сил потенциального поля), следовательно циркуляция напряженности электростатического поля по замкнутому контуру равна нулю.

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0$$

■ (система точечных зарядов)

Если в электростатическом поле точечного заряда q из точки *1* в точку *2* вдоль произвольной траектории перемещается другой точечный заряд q_0, то сила, приложенная к заряду, совершает работу. Работа силы F по элементарному перемещению $\overrightarrow{dl}$ равна:

$$dA = \vec{F} d\vec{l} = Fdl * cos\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qq`}{r^2} dl * cos\alpha$$

Т.к. $dr = dl * cos\alpha$, то $dA = \frac{qq`}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dr}{r^2}$

Работа при перемещении заряда из точки 1 в точку 2:

$$A = \int_{r_1}^{r_2} dA = \frac{qq`}{4\pi\varepsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{qq`}{4\pi\varepsilon_0} (\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2})$$

Интеграл не зависит от траектории перемещения, а определяется только начальной и конечной точкой. Следовательно, электростатические силы являются консервативными. ■

19. *Чему равен ротор вектора напряженности электростатического поля. Приведите доказательство для системы точечных зарядов.*

Теорема Стокса: циркуляция вектора $\vec{E}$ по произвольному контуру Г равна потоку вектора $rot\vec{E}$ через произвольную поверхность S, ограниченную данным контуром

$$\int_{\Gamma} Edl = 0 = \int_{S} rot\vec{E}dS \Rightarrow rot\vec{E} = 0$$

20. ***Запишите уравнения Пуассона и Лапласа для потенциала электростатического поля.***

$\vec{E} = -grad\varphi,$ то есть $E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}$.

$div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ – теорема Гаусса в дифференциальной форме для вектора $\vec{E}$.

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

- уравнение Пуассона для потенциала электростатического поля.

При $\rho \equiv 0$ оно превращается в:

$$\Delta\varphi = 0$$

- уравнение Пуассона для потенциала электростатического поля.

Здесь Δ – лапласиан.

21. ***Чему равны напряженность и потенциал электрического поля, а также плотность свободных зарядов внутри однородного проводника. Приведите доказательства утверждений.***

Напряженность $\vec{E} = 0$, т.к. если в какой-либо точке внутри проводника напряженность электрического поля отлична от нуля, то под действием этого поля в проводнике возникает движение свободных зарядов - ток. Ток течёт до тех пор, пока поле зарядов, перераспределившихся по объему проводника, не скомпенсирует воздействие внешнего поля, то есть поле внутри проводника станет равным нулю.

$\vec{E} = -grad\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = const.$

$Q = \oint_S \vec{E}\, d\vec{S} = \oint_S 0\, d\vec{S} \Rightarrow$ свободных зарядов внутри проводника нет, они распределены по его поверхности.

22. ***Какова связь напряженности электрического поля у поверхности однородного проводника с поверхностной плотностью свободных зарядов.***

Напряженность у поверхности проводника из теоремы Гаусса определяется поверхностной плотностью зарядов:

$$\oint_S \vec{E}\,d\vec{S} = \frac{dQ}{\varepsilon_0\varepsilon} = \frac{\sigma\Delta S}{\varepsilon_0\varepsilon}$$

Т.к. $\vec{E}$ перпендикулярно поверхности, $\oint_S \vec{E}\,d\vec{S} = E\Delta S$.

Тогда $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon}$.

23. Плоский конденсатор и его электроемкость.

Напряженность поля от каждой пластины: $\mathrm{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$.

Тогда $E_{\text{конд}} = 2E$, при этом $q = \sigma S$.

$$U = \int_0^d E dx = \frac{qd}{S\varepsilon_0}$$

$$C = \frac{q}{U} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

24. Как рассчитать емкость батареи конденсаторов.

Емкость батареи конденсаторов можно рассчитать, используя правила последовательного и параллельного соединения конденсаторов:

- $\frac{1}{C} = \Sigma_i^n \frac{1}{C_i} -$ последовательное соединение $(Q - const)$;
- $\mathrm{C} = \Sigma_i^n C_i -$ параллельное соединение $(U - const)$;

25. Дайте определение вектора электрической поляризации.

Вектор поляризации – количественная характеристика поляризации диэлектрика, равный дипольному моменту единицы объема диэлектрика, возникающему при его поляризации:

$$\vec{p} = \frac{\Sigma_i \overrightarrow{p_i}}{\Delta V}$$

26. Что такое электрическая индукция поля.

Количественная характеристика *поляризации диэлектрика* (появление дипольного момента у молекул диэлектрика во внешнем электрическом поле). В случае одинаковых диполей:

$$\vec{P} = n\overrightarrow{p_e},$$

$n -$ число диполей в единице объема вещества,

$$\overrightarrow{p_e} - \text{дипольный момент одного диполя}$$

В не очень сильных электрических полях для большинства материальных сред вектор поляризации пропорционален напряженности поля $\vec{E}$ (такие среды относят к *линейным*):

$$\vec{P} = \chi\varepsilon_0\vec{E},$$

$$\chi = const - \text{диэлектрическая восприимчивость диэлектрика}$$

Существуют среды (например, сегнетоэлектрики), в которых связь между $\vec{P}$ и $\vec{E}$ существенно не линейна. В сильных полях поляризация этих сред насыщается и перестает зависеть от внешнего поля. В некоторых случаях для таких диэлектриков вектор $\vec{P}$ можно считать постоянным независимо от поля («замороженная» поляризация).

В теории электричества вводят понятие вектора индукции электрического поля:

$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{p} = \varepsilon_0(1+\chi)\vec{E} = \varepsilon_0\varepsilon\vec{E},$ где $\varepsilon = 1 + \chi$ – диэлектрическая проницаемость вещества.

27. ***Сформулируйте теорему Гаусса для электрической индукции в интегральной и дифференциальной формах.***

В электростатическом поле поток вектора индукции через любую замкнутую поверхность равен сумме свободных зарядов, заключённых внутри этой поверхности:

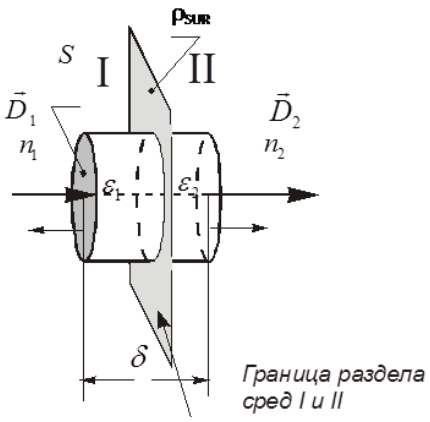
$$\oint \vec{D}d\vec{S} = \sum q_i$$

- теорема Гаусса для электрической индукции в интегральной форме,

$$div\vec{D} = \rho, \qquad \rho - \text{объемная плотность заряда}$$

- теорема Гаусса для электрической индукции в дифференциальной форме.

28. ***Запишите граничные условия для вектора индукции электрического поля. Откуда они следуют?***



$$\boldsymbol{D_{2n} - D_{1n} = \sigma}, \quad \boldsymbol{\varepsilon_2 E_{2n} - \varepsilon_1 E_{1n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

– для нормальных составляющих электрической индукции, σ – поверхностная плотность заряда ($D = \varepsilon\varepsilon_0 E$);

$$\boldsymbol{\frac{1}{\varepsilon_1} D_{1\tau} - \frac{1}{\varepsilon_2} D_{2\tau} = 0}, \quad \boldsymbol{E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0}$$

– для тангенциальных (касательных) составляющих напряжённости электрического поля

- Если первый диэлектрик заменить проводником

$$\boldsymbol{D_n = \sigma}, \qquad \boldsymbol{E_\tau = 0}$$

Th: $\boldsymbol{E_{1\tau} = E_{2\tau}}$.

■ Рассмотрим контур $ABCD$, симметричный относительно границы раздела двух сред. Циркуляция вектора напряженности вдоль контура:

$$\oint_C Edl = 0 = \int_A^B Edl + \int_B^C Edl + \int_C^D Edl + \int_D^A Edl$$

Ограничения: ширина контура настолько мала, чтобы

$$\int_A^B Edl = \int_C^D Edl = 0$$

Тогда

$$\int_B^C Edl + \int_D^A Edl = 0, E_{2\tau} l_{BC} - E_{1\tau} l_{DA} = 0, \text{но } l_{BC} = -l_{DA} \ \Rightarrow \blacksquare$$

29. Материальные уравнения для электрического поля, диэлектрические восприимчивость и проницаемость.

В не очень сильных электрических полях для большинства материальных сред вектор поляризации пропорционален напряженности поля $\vec{E}$ (такие среды относят к *линейным*):

$$\vec{P} = \chi\varepsilon_0\vec{E},$$

$\chi = const -$ диэлектрическая восприимчивость диэлектрика

$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{p} = \varepsilon_0(1+\chi)\vec{E} = \varepsilon_0\varepsilon\vec{E},$ где $\varepsilon = 1 + \chi$ – диэлектрическая проницаемость вещества.

Материальное уравнение: $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$.

30. ***Взаимная энергия системы точечных зарядов, собственная энергия заряда.***

Взаимная энергия системы точечных зарядов – работа кулоновских сил по удалению зарядов друг от друга на бесконечность: $A = \varphi q$.

$$W = \frac{1}{2}\sum_i\sum_k \frac{q_i q_k}{4\pi\varepsilon_0 r_{ik}} = \frac{1}{2}\sum_i \varphi_i q_i$$

Коэффициент $\frac{1}{2}$ получен, т.к. каждая работа учитывалась в дважды.

Собственная энергия заряда — это энергия взаимодействия различных внутренних элементов заряда между собой. *Собственная энергия точечного заряда бесконечна*. Энергия взаимодействия дискретных зарядов — это полная энергия поля за вычетом собственной энергии зарядов. Она положительна, когда их собственная энергия (всегда положительная) меньше полной энергии поля, и отрицательна — когда больше.

31. ***Энергия системы непрерывно распределенных зарядов (формула).***

Пусть заряды непрерывно распределены в некотором объеме с плотностью $\rho(\vec{r})$ (по некоторой поверхности с плотностью $\sigma(\vec{r})$).

$$W = \frac{1}{2}\int_V \rho(\vec{r})\varphi(\vec{r})dV \qquad \left(W = \frac{1}{2}\int_S \sigma(\vec{r})\varphi(\vec{r})dS\right)$$

32. ***Запишите формулы для энергии электростатического поля и ее объемной плотности.***

Объемная плотность энергии электрического поля:

$$\omega_E = \frac{dW}{dV} = \frac{1}{2}\rho\varphi = \frac{1}{2}\left(\vec{E},\vec{D}\right) = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon E^2$$

Энергия электрического поля:

$$W = \int_V \omega_E dV = \frac{1}{2}\sum_i^N Q_i\varphi_i$$

33. *Чему равны сила и момент сил, действующие на точечный диполь в электрическом поле.*

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

В проекции на ось X (другие рассматриваются аналогично):

$$F_X = q\left(E_x\left(\frac{l}{2}, 0{,}0\right) - E_x\left(-\frac{l}{2}, 0{,}0\right)\right)$$

$$F_X \approx q\frac{\partial E}{\partial x}l = q(\vec{l}, \vec{\nabla})E_X = (\vec{p}, \vec{\nabla})E_X, \qquad \vec{\nabla} = \vec{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

Тогда:

$$\vec{F} = (\vec{p}, \vec{\nabla})\vec{E}$$

$$\vec{M} = [\vec{l} \times \vec{F}] = [\vec{l} \times q\vec{E}] = [q\vec{l} \times \vec{E}] = [\overrightarrow{p_e} \times \vec{E}]$$

34. *Дайте определение силы электрического тока и плотности тока. Какова связь между ними.*

Сила тока – скалярная величина, показывающая, какой заряд протекает через полное сечение проводника в единицу времени:

$$I = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}$$

За направление тока принимают направленное движение положительных зарядов (в металле движутся электроны).

Плотность тока – заряд, проходящий в единицу времени через единичное сечение проводника, расположенное перпендикулярно направлению скорости движения зарядов:

$$\vec{\jmath} = eN\vec{v},$$

$$N - \text{концентрация зарядов},$$

$$e - \text{эл} - \text{ый заряд},$$

$$v - \text{скорость упорядоченного движения зарядов}$$

Связь между силой тока и плотностью тока:

$$dI = (\vec{\jmath}, d\vec{S})$$

35. *Запишите уравнение непрерывности в интегральной и дифференциальной формах.*

Рассмотрим некий суммарный электрический заряд Q в некотором объеме $V = const.$ Этот заряд может измениться только за счет втекания или вытекания заряда из V в силу закона сохранения заряда. Поэтому изменение заряда $dQ = -dt\oint_S(\vec{j}\,, d\vec{S})$.

Таким образом,

$$\frac{dQ}{dt} + \oint_S (\vec{j}, d\vec{S}) = 0 - \text{уравнение непрерывности в инт} - \text{й форме.}$$

В силу постоянства объема:

$$\frac{dQ}{dt} = \int_V \frac{\partial\rho}{\partial t} dV$$

$$\oint_S (\vec{j}, d\vec{S}) = \int_V div\vec{j}\, dV$$

В силу произвольности объема:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + div\vec{j} = 0 - \text{уравнение непрерывности в диф} - \text{й форме.}$$

36. Условие стационарности тока. Закон Ома для участка цепи и его дифференциальная форма.

При стационарном постоянном токе $\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$, тогда:

$$div\vec{j} = 0 - \text{условие стационарности тока.}$$

Это означает, что линии постоянного тока (линии, касательные к которым в каждой точке совпадают с вектором $\vec{j}$ в этой точке).

Если концентрация носителей заряда не зависят от напряженности поля, то справедлив закон Ома:

$$I = \frac{U}{R}$$

Сила тока на участке цепи прямо пропорциональна напряжению и обратно пропорциональная электрическому сопротивлению данного участка цепи.

Закон Ома в дифференциальной форме:

$$\vec{j} = \lambda(\vec{E}_{\text{стат}} + \vec{E}_{\text{стор}}) = \lambda\vec{E},$$

$$\lambda - \text{удельная проводимость среды,}$$

$$\vec{E}_{\text{стор}} - \text{напряженность поля сторонних сил,}$$

$$\vec{E}_{\text{стат}} - \text{напряженность поля электростатических сил.}$$

37. Сопротивление и удельное сопротивление проводника. Проводимость и удельная проводимость проводника.

Электрическое сопротивление – физическая величина, характеризующая свойства проводника препятствовать прохождению электрического тока:

$$R = \oint_L \frac{dl}{\lambda dS} - \text{сопротивление контура,}$$

$$\lambda - \text{удельная проводимость проводника.}$$

Электрическая проводимость – физическая величина, характеризующая способность тела проводить электрический ток. Величина обратна электрическому сопротивлению.

Удельное проводимость – мера способности вещества проводить электрический заряд.

Удельное сопротивление – величина, обратная удельному сопротивлению.

38. Как рассчитать сопротивление батареи проводников.

Используя законы последовательного и параллельного соединения проводников:

$$R = \sum_i R_i - \text{последовательное соединение,}$$

$$\frac{1}{R} = \sum_i \frac{1}{R_i} - \text{параллельное соединение.}$$

39. Закон Джоуля-Ленца и его дифференциальная форма.

ЭДС характеризует способность сторонних сил разделять заряды и численно равна разности потенциалов на обкладках источника (батареи) при разомкнутой внешней цепи. При протекании электрического тока положительные заряды переходят от точек с большим потенциалом к точкам с меньшим. Поэтому заряды теряют энергию, которая переходит в тепло.

Плотность мощности тепловыделения (мощность в единице объема в проводнике):

$$W_{\text{уд}} = \frac{dW}{dV} = \left(\vec{E}, \vec{j}\right) = \lambda E^2 = \frac{j^2}{\lambda} - \text{закон Д} - \text{Л в диф} - \text{й форме.}$$

Для участка контура (электрической цепи) мощность тепловыделения получим, проинтегрировав $W_{уд}$ по объему проводника на этом участке контура:

$$W = I^2R = IU = \frac{U^2}{R} - \text{закон Д} - \text{Л в инт} - \text{й форме},$$

$$U - \text{падение напряжения на этом участке.}$$

40. Сформулируйте правила Кирхгофа.

1) Рассмотрим постоянный ток, т.е. $div\vec{j} = 0$.

   Пусть в некотором объеме V с границей S есть разветвление токов – «узел». Тогда:

   $$\int_V div\,\vec{j} = 0 = \oint_S (\vec{j}, d\vec{S}) =$$

   $$= \Sigma_i I_i - \text{суммарный ток, текущий через поверхность } S.$$

   Таким образом,

   $$\Sigma_i I_i = 0 - I \text{ правило Кирхгофа.}$$

   $$\text{В узле алгебраическая сумма токов равна 0.}$$

   Следует из того, что $(\vec{j}, d\vec{S})$ получается с разными знаками для всех втекающих в узел токов и вытекающих из него:

   $$(\vec{j}, d\vec{S}) \begin{cases} > 0, & \vec{j} \uparrow\uparrow \vec{n} - \text{для вытекающих} \\ < 0, & \vec{j} \uparrow\downarrow \vec{n} - \text{для втекающих} \end{cases}$$

2) В замкнутом контуре (цепи) сумма падений напряжений равна сумме действующих ЭДС:

   $$\Sigma_{i,k}(\pm I_{ik}R_{ik}) = \Sigma_{i,k}(\pm \mathcal{E}_{ik}) - II \text{ правило Кирхгофа.}$$

   Если при обходе контура ток I_{ik}течет в ту же сторону, то $I_{ik}R_{ik} > 0$, если первым встретится отрицательны полюс источника, то $\mathcal{E}_{ik} > 0$ (т.к. $\vec{E}_{стор}$ направлен от “-“ к “+”).

Для первого правила Кирхгофа для N узлов в цепи получится $N - 1$ уравнение. Для второго правила уравнений будет столько, сколько в цепи есть можно найти замкнутых контуров, отличающихся хотя бы одной ветвью (участком цепи).

41. *Закон сохранения энергии для цепей постоянного тока, содержащих ЭДС.*

Стационарные токи могут протекать только при наличии сторонних сил (не кулоновского происхождения), действующих на заряженные частицы. Их описывают полем сторонних сил.

Закон Ома:

$$\vec{j} = \lambda\left(\vec{E}_{\text{стат}} + \vec{E}_{\text{стор}}\right)$$

$$\mathcal{E} = \oint_L \left(\vec{E}_{\text{стор}}, d\vec{l}\right)$$

Сторонние силы не потенциальны, поэтому их работа по перемещению заряда по замкнутому контуру:

$$A = I\mathcal{E} \neq 0$$

Работа кулоновских сил по замкнутому контуру равна 0, следовательно

$$Q = I\mathcal{E} - \text{закон сохранения энергии для цепи, содержащей ЭДС.}$$

Количество теплоты, выделяемое во всей цепи равно работе сторонних сил.

42. *Запишите закон взаимодействия элементов тока – закон Ампера.*

Если проводник с током находится в магнитном поле, характеризующимся вектором магнитной индукции $\vec{B}$, то на каждый заряд dq, образующий этот ток и движущийся со скоростью $\vec{v}$, действует сила Лоренца $\vec{F} = q\left[\vec{v}, \vec{B}\right]$. При этом совокупная сила, действующая со стороны магнитного поля на элемент тока $d\vec{l}$ проводника, определяется *законом Ампера*:

$$d\vec{F} = I\left[d\vec{l}, \vec{B}\right].$$

Для проводника конечной длины:

$$\vec{F} = I\int_L [d\vec{l}, \vec{B}].$$

43. *Не противоречит ли закон Ампера третьему закону Ньютона.*

Для замкнутых контуров рассмотрим два элемента тока $d\vec{l}_1(I_1)$ и $d\vec{l}_2(I_2)$, связанных вектором $\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{r}$, по закону Б-С-Л:

$$d\vec{B}_1 = \frac{\mu_o I_1}{4\pi}\frac{\left[d\vec{l}_1, \vec{r}\right]}{|\vec{r}|^3},$$

$$d\vec{B}_2 = \frac{\mu_o I_2}{4\pi}\frac{[d\vec{l}_2, -\vec{r}]}{|\vec{r}|^3}.$$

По закону Ампера:

$$d\vec{F}_{12} = I_1[d\vec{l}_1, d\vec{B}_2],$$

$$d\vec{F}_{21} = I_2[d\vec{l}_2, d\vec{B}_1],$$

$$d\vec{F}_{12} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi r^3}\left[d\vec{l}_1, [d\vec{l}_2, \vec{r}]\right] = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\left(d\vec{l}_2\left(d\overrightarrow{l_1}, \frac{\vec{r}}{r^3}\right) - \frac{\vec{r}}{r^3}(d\vec{l}_1, d\vec{l}_2)\right)$$

$$d\vec{F}_{21} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi r^3}\left[d\vec{l}_2, [d\vec{l}_1, \vec{r}]\right] = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\left(d\vec{l}_1\left(d\vec{l}_2, \frac{\vec{r}}{r^3}\right) - \frac{\overrightarrow{r}}{r^3}(d\vec{l}_2, d\vec{l}_1)\right),$$

$$d\vec{F}_{12} + d\vec{F}_{21} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\left(d\vec{l}_1\left(d\vec{l}_2, \frac{\vec{r}}{r^3}\right) - d\vec{l}_2\left(d\vec{l}_1, \frac{\vec{r}}{r^3}\right)\right) \neq 0$$

В общем случае для элементов тока $d\overrightarrow{F_{12}} \neq -d\overrightarrow{F_{21}}$ (не выполняется III закон Ньютона) (т.к. в природе не существует элементов тока как таковых). Но если продолжить равенства:

$$\vec{F}_{12} = \oint_{L_1} d\vec{F}_{12} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{L_1}\left(d\vec{l}_2\left(d\vec{l}_1, \frac{\vec{r}}{r^3}\right) - \frac{\vec{r}}{r^3}(d\vec{l}_1, d\vec{l}_2)\right),$$

$$\vec{F}_{21} = \oint_{L_2} d\overrightarrow{F_{21}} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{L_2}\left(d\vec{l}_1\left(d\vec{l}_2, \frac{\vec{r}}{r^3}\right) - \frac{\vec{r}}{r^3}(d\vec{l}_1, d\vec{l}_2)\right).$$

Т.к. $\frac{\vec{r}}{r^3}$ представляет из себя кулоновское (потенциальное) поле, то по формуле Стокса:

$$\oint_{L_1}\left(d\vec{l}_2\left(d\vec{l}_1, \frac{\vec{r}}{r^3}\right)\right) = d\vec{l}_2 \int\int_S rot\frac{\vec{r}}{r^3} d\vec{S} = 0,$$

$$\oint_{L_2}\left(d\vec{l}_1\left(d\vec{l}_2, \frac{\vec{r}}{r^3}\right)\right) = d\vec{l}_1 \int\int_S rot\frac{\vec{r}}{r^3} d\vec{S} = 0.$$

Пусть $L_1 = L_2$ (рассматриваем два параллельных провода одного контура, например). Тогда III закон Ньютона выполняется:

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_L\left(\frac{\vec{r}}{r^3}(d\vec{l}_1, d\vec{l}_2) - \frac{\vec{r}}{r^3}(d\vec{l}_1, d\vec{l}_2)\right) = 0,$$

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}.$$

44. *Что такое вектор магнитной индукции поля. Запишите закон Био – Савара – Лапласа.*

Вектор магнитной индукции $\vec{B}$ – векторная величина, являющаяся силовой характеристикой магнитного поля в данной точке пространства. Определяет, с какой силой $\vec{F}$, называемой силой Лоренца, магнитное поле действует на заряд q, движущийся со скоростью $\vec{v}$:

$$\vec{F} = q[\vec{v}, \vec{B}].$$

Для стационарных токов выполняется закон Био – Савара – Лапласа:

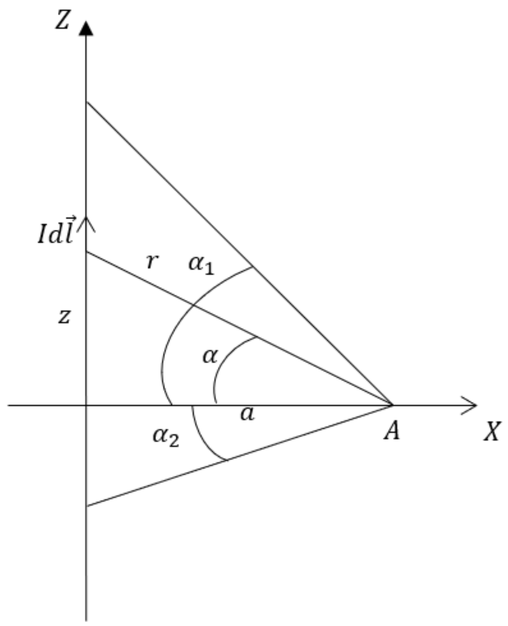
$$\vec{B}(M) = \int_L d\vec{B} = \frac{\mu_o I}{4\pi} \int_L \frac{[d\vec{l}, (\vec{r} - \vec{r'})]}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3}$$

–для замкнутого контура.

$$\vec{B}(M) = \int_V d\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_L \frac{[d\vec{j}(\vec{r'}), (\vec{r} - \vec{r'})]}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3} dV$$

–для распределенного по объему (поверхности) току.

45. *Чему равна индукция магнитного поля прямого бесконечного провода с током.*



$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

Все элементы тока $d\vec{l}$ имеют одинаковое направление. Следующая цепочка формул приводит к искомому результату:

$$tg\alpha = \frac{z}{a}, \qquad r = \frac{a}{cos\alpha}$$

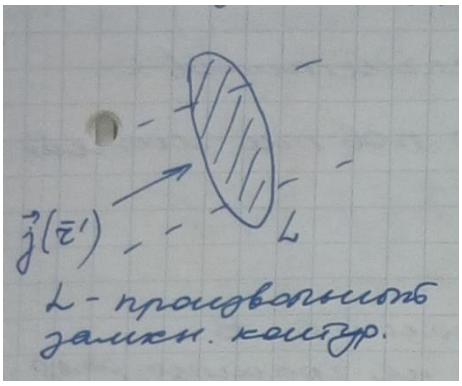
$$z = atg\alpha, \qquad dl = dz = \frac{a}{\cos^2 \alpha} d\alpha$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_o I}{4\pi} \frac{[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{cos\alpha}{a} d\alpha$$

$$B = \int_{-\alpha_2}^{\alpha_1} \frac{\mu_0 I cos\alpha d\alpha}{4\pi a} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (sin\alpha_1 + sin\alpha_2), \alpha_{1,2} \in \left[0, \frac{pi}{2}\right]$$

Бесконечному проводу соответствуют углы $\frac{\pi}{2}$, после подстановки получим искомое равенство.

46. *Сформулируйте теорему о циркуляции магнитной индукции в интегральной и дифференциальной формах.*



Закон о полном токе. В произвольной намагниченной среде циркуляция вектора напряженности магнитного поля $\vec{H}$ по любому замкнутому контуру L равна алгебраической сумме токов I, которые охватываются этим контуром.

$$\int_L \left(\vec{H}, d\vec{l}\right) = \Sigma_i(\pm I_i) = I$$

$$I - \text{полный ток проводимости, текущий через } S$$

В дифференциальной форме:

$$rot\vec{H} = \vec{j}, \qquad \vec{j} - \text{объемная плотность тока}$$

Вывод: $\int_L \left(\vec{H}, d\vec{l}\right) = \{\text{теорема Стокса}\} = \int_S (rot\,\vec{H}, d\vec{S}) = \int_S (\vec{j}, d\vec{S}) = I$

Эту теорему можно записать для вектора магнитной индукции как

$$\int_L (\vec{B}, d\vec{l}) = \mu\mu_0 \Sigma_i(\pm I_i), \qquad rot\vec{B} = \mu\mu_o\vec{j}$$

$I > 0$, если правый винт, вращаясь по направлению обхода контура, вкручивается в направлении электрического тока.

Теорема о циркуляции справедлива только для постоянного тока.

47. *Сформулируйте теорему Гаусса для магнитного поля в интегральной и дифференциальной формах.*

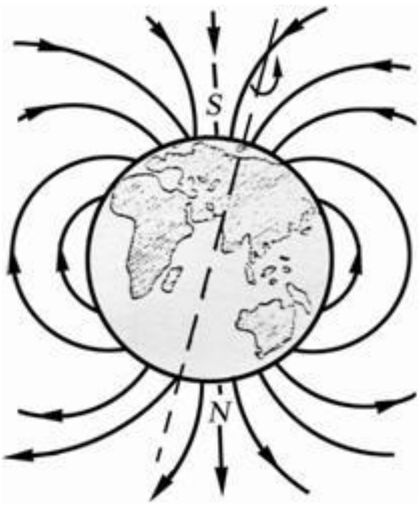
Магнитный поток, как и поток вектора напряженности электрического поля, можно считать равным числу магнитных силовых линий, пересекающих рассматриваемую поверхность. Магнитное поле является вихревым, то есть его линии магнитной индукции замкнуты. Поэтому замкнутая поверхность, помещенная в магнитное поле, пронизывается линиями магнитной индукции так, что любая линия, входящая в эту поверхность, выходит из нее.

Теорема. Полный магнитный поток через произвольную замкнутую поверхность равен нулю.

$$\Phi = \int_S (\vec{B}, d\vec{S}) = 0 - \text{т. Гаусса для магниного поля в инт} - \text{й форме}$$

Этот результат является математическим выражением того, что *в природе нет магнитных зарядов – источников магнитного поля*, на которых начинались и заканчивались бы линии магнитной индукции.

Заменив поверхностный интеграл объемным, получим:



$$\int_V div\vec{B}\, dV = 0$$

Это условие должно выполняться для любого произвольного объема V, а это, в свою очередь, возможно, если подынтегральная функция в каждой точке поля равна нулю. Таким образом, *магнитное поле обладает тем свойством, что его* ***дивергенция*** *всюду равна нулю*:

$$div\vec{B} = 0 - \text{т. Гаусса для магнитного поля в диф} - \text{й форме}$$

В этом его отличие от электрического поля, которое является потенциальным и может быть выражено скалярным потенциалом φ, магнитное поле – *вихревое,* или *соленоидальное.*

48. Что такое векторный потенциал? Как он связан с магнитной индукцией? Условие калибровки.

Согласное правилам векторного анализа закон Б – С – Л можно переписать в виде

$$\vec{B} = \frac{\mu_o I}{4\pi}\int_L \frac{[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3} = \frac{\mu_o I}{4\pi} rot \int_L \frac{d\vec{l}}{r}$$

Можно ввести векторное поле:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_L \frac{Id\vec{l}}{r}$$

При этом выполняется:

$$\vec{B} = rot\vec{A}$$

Всякое векторное поле $\vec{A}$, удовлетворяющее приведенному выше условию, называют *векторным потенциалом магнитного поля.* Его можно определить с точностью до градиента скалярной функции координат (т.к. $\mathrm{r}ot(\phi\vec{A}) = \phi rot\vec{A} - [\vec{A}, \nabla\phi\ ]$).

Векторный потенциал поля токов, распределенных по объему:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{j}dV}{r}, \qquad \vec{j} - \text{вектор объемной плотности тока}$$

Векторный потенциал поля токов, распределенных по поверхности:

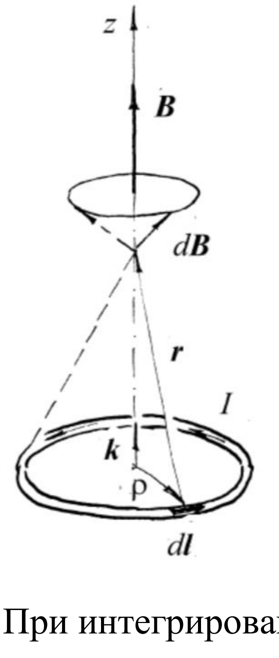
$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_S \frac{\vec{i}dS}{r}, \qquad \vec{i} - \text{вектор поверхностной плотности тока}$$

Не трудно получить т.н. условие калибровки (не забываем: $div\ rot\vec{a} = 0$):

$$\mathrm{d}iv\vec{B} = 0$$

То есть магнитное поле соленоидально. Силовые линии магнитного поля, как и любого соленоидального, всегда замкнуты.

49. Чему равна индукция магнитного поля плоского витка с током?



$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_L \frac{\left[d\vec{l}, (\vec{r} - \vec{r}`)\right]}{|\vec{r} - \vec{r}`|^3},$$

$$L - \text{окружность радиуса } R$$

$$\vec{r} = \{0, 0, z\} - \text{ищем } \vec{B} \text{ на оси кольца}$$

$$\vec{r} = \{Rcos\alpha, Rsin\alpha, 0\},$$

$$d\vec{l} = \vec{i}_\alpha Rd\alpha = Rd\alpha\{-sin\alpha, cos\alpha, 0\}$$

Получено из связи декартовых и полярных координат.

$$\left[d\vec{l}, (\vec{r} - \vec{r}`)\right] = Rd\alpha\ \{zcos\alpha, zsin\alpha, R\}$$

При интегрировании по окружности $B_x = B_y = 0$, т.к.

$$\int_0^{2\pi} \dots sin\alpha d\alpha = 0\,, \qquad \int_0^{2\pi} \dots cos\alpha d\alpha = 0$$

Поэтому остается компонента B_z ($\vec{B} = \vec{\iota}_z B_z$) на оси кольца.

$$\vec{B} = \vec{\iota}_z \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 d\alpha}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \vec{\iota}_z \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

При $z = 0$:

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

50. *Чему равны сила и момент сил, действующие на элементарный ток в магнитном поле?*

Элементарный ток – замкнутый ток, удовлетворяющий следующим требованиям:

- размеры контура тока много меньше по сравнению с расстоянием до тех точек поля, в которых мы рассматриваем его поле;
- на всем протяжении замкнутого тока значения величин, характеризующих внешнее поле (относится к вектору напряженности $\vec{H}$ этого поля и значениям его производных), можно считать постоянными.

При определенных условиях любой замкнутый ток может рассматриваться как элементарный.

Сила, действующая со стороны однородного магнитного поля на элементарный ток I в проводнике L, определяется *законом Ампера*:

$$\vec{F} = I \int_L \left[d\vec{l}, \vec{B}\right]$$

Введем понятие *магнитного момента* контура:

$$\vec{p}_m = \frac{1}{2} \int_V [\vec{r}`, j(\vec{r}`)] dV$$

Для линейного контура с током:

$$\vec{p}_m = \frac{I}{2} \int_L \left[\vec{r}`, d\vec{l}\right]$$

Для плоского контура L (S – площадь):

$$\vec{p}_m = \vec{n}_S I S$$

Здесь $\vec{n}_S$ – нормаль к S, направление тока I (направление $d\vec{l}$) согласованы по правилу правого винта (если ручка правого винта вращается по направлению $Id\vec{l}$, то винт будет вкручиваться по направлению $\vec{n}_S$).

Результат интегрирования не зависит от формы области и потому служит характеристикой контура.

На контур малых по сравнению с масштабом неоднородности поля размеров действует сила

$$\vec{F} = div(\vec{p}_m, \vec{B})$$

Она однозначно определяется величиной и ориентацией магнитного момента контура. Контур втягивается в область более сильного поля, если $(\vec{p}_m, \vec{B}) > 0$, либо выталкивается в область менее сильного поля, если $(\vec{p}_m, \vec{B}) < 0$.

Вращающий момент, действующий на контур со стороны внешнего поля,

$$\vec{M} = I \int_L [\vec{r}[d\vec{l}, \vec{B}]],$$

$$\vec{r} - \text{вектор, проведенный из точки, относительно которой}$$
$$\text{рассчитыывается момент, к элементу контура } d\vec{l}.$$

В однородном поле эта формула преобразуется к виду

$$\vec{M} = [\vec{p}_m, \vec{B}]$$

51. *Сила Лоренца и характер движения заряда в постоянных электрическом и магнитном полях.*

Если частица с зарядом q движется со скоростью $\vec{v}$ в магнитном поле $\vec{B}$, то на эту частица действует сила Лоренца.

$$\vec{F} = q[\vec{v}, \vec{B}]$$

Так как сила Лоренца в каждый момент времени перпендикулярна скорости частицы, то она не влияет на модуль скорости, но изменяет ее направление – частица, двигаясь прямолинейно, начнет двигаться по спирали.

Если частица с зарядом q влетает с некоторой скоростью в однородное электрическое поле между пластинами плоского конденсатора, то на нее будет действовать постоянная сила $\vec{F} = q\vec{E}$, перпендикулярно пластинам, что, в целом, сравнимо с ситуацией полета тела, брошенного под углом к горизонту, т.е. частица будет двигаться по параболе.

52. *Сформулируйте закон электромагнитной индукции Фарадея и правило Ленца.*

Рассмотрим произвольный замкнутый проводящий контур L в магнитном поле $\vec{B}$. Введем понятие магнитного потока, или потока вектора магнитной индукции, сцепленного с контуром L:

$$\Phi = \int_S (\vec{B}\,, d\vec{S}), \qquad S - \text{произвольная пов} - \text{ть, опирающаяся на } L$$

Φ имеет смысл числа силовых линий $\vec{B}$, пронизывающих контур.

Если магнитный поток, сцепленный с контуром, меняется во времени: $\Phi = \Phi(t)$, то в контуре возникает ЭДС, называемся ЭДС индукции.

Закон Фарадея. ЭДС индукции в контуре равна скорости изменения магнитного потока через контур, взятой с противоположным знаком.

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = -\frac{d\Phi}{dt} - \text{закон электромагнитной индукции}$$

Знак $'-'$ в законе Фарадея указывает направление индукционного электрического тока $I_{\text{инд}}$, возникающего под действием $\mathcal{E}_{\text{инд}}$, в соответствии с *правилом Ленца*.

Правило Ленца. Возникающий индукционный ток имеет такое направление, что создаваемый им магнитный поток сквозь поверхность, ограниченную контуром, стремится компенсировать то изменение магнитного потока, которое и вызвало это изменение индукционного тока.

53. *В чем заключается явление самоиндукции?*

Появление ЭДС самоиндукции в контуре (за счет изменения тока в контуре или геометрии контура) приводит к возникновению индукционного тока в контуре, который противодействует изменению уже существовавшего тока в контуре (по правилу Ленца). Таким образом, явление самоиндукции (возникновение $\mathcal{E}_{\text{самоинд}}$ и $I_{\text{самоинд}}$) замедляет возрастание ли убывание тока в контуре.

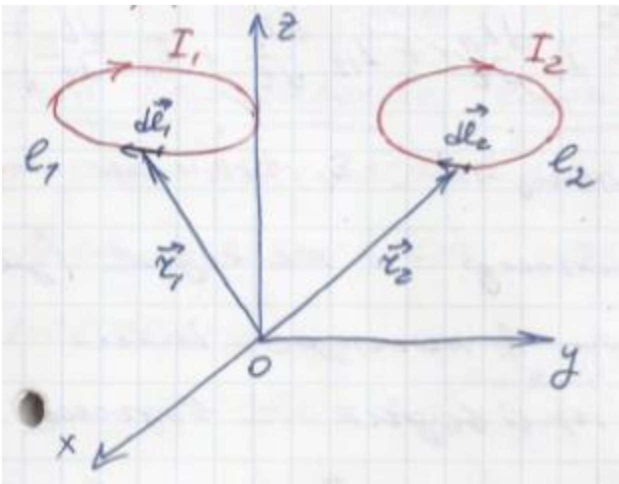
54. ***Что характеризует коэффициент самоиндукции (индуктивность)?***

Магнитный поток через проводящий контур может создаваться током, протекающим по этому же контуру.

Коэффициент самоиндукции (индуктивность) замкнутого контура – коэффициент пропорциональности между силой тока I в этом контуре и магнитным потоком Ф через этот контур, создаваемый этим током:

$$L = \frac{\Phi}{I}$$

55. ***В чем заключается явление взаимной индукции?***



Система из 2ˣ контуров с токами I_1 и I_2 создает в пространстве некоторое магнитное поле. Магнитный поток Φ_1, сцепленный с контуром l_1, может меняться при изменении тока I_1, деформации контура l_1, при изменении тока I_2, деформации контура l_2 или при изменении взаимного расположения этих контуров. Аналогично для Φ_2 контура l_2.

В общем виде:

$$\Phi_1 = L_{11}I_1 + L_{12}I_2$$

$$L_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{l1}\oint_{l2}\frac{d\vec{l}_1(\vec{r}_1)d\vec{l}_2(\vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} - \text{коэффициент взаимной индукции.}$$

$$L_{11} - \text{коэффициент самоиндукции контура } l_1$$

Коэффициент взаимной индукции зависит от геометрии контуров и их взаимного расположения.

Аналогично:

$$\Phi_2 = L_{21}I_1 + L_{22}I_2$$

При этом $L_{21} = L_{12}$ – соотношение взаимоиндукции.

Таким образом, ЭДС индукции, которая может возникнуть в контуре l_1:

$$\mathcal{E}_{1_{\text{инд}}} = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -(L_{11}\frac{dI_1}{dt} + I_1\frac{dL_{11}}{dt} + L_{12}\frac{dI_2}{dt} + I_2\frac{dL_{12}}{dt})$$

Итак, явление взаимной индукции – явление возникновения ЭДС индукции в одном контуре при изменении силы тока в другом или их взаимного положения в пространстве.

56. *Чему равна собственная энергия электрического поля?*

Электрический ток обладает запасом энергии, называемой *магнитной*. Она может зависеть только от величины и распределения токов, а также от магнитных свойств среды, заполняющей пространство.

Элементарная работа, которую должен совершить внешний источник против ЭДС: $dA = -\mathcal{E}_{\text{инд}} I dt = \{\text{закон Фарадея}\} = I d\Phi$

Эта работа пойдет на увеличение магнитной энергии W: $dW = dA$

С учетом связи пропорциональности магнитного потока и тока с постоянным коэффициентом самоиндукции:

$$W = \int dW = L\int I dI = \frac{LI^2}{2}$$

57. *Запишите формулы для энергии магнитного поля и ее объемной плотности.*

Объемная плотность энергии магнитного поля в каждой точке пространства равна

$$w_M = \frac{1}{2}\vec{B}\vec{H}$$

$$\vec{B} - \text{магнитная индукция}$$

$$\vec{H} - \text{напряженность магнитного поля в этой точке}$$

Формула справедлива не только для поля, создаваемого катушками с током, но и для произвольного магнитного поля. Для изотропных сред $\mu = const, \vec{B} = \mu_0\mu\vec{H}$, поэтому $w_M = \frac{\mu_0\mu H^2}{2}$

Если магнитное поле неоднородно, то его можно разбить на бесконечно малые элементы объема dV, в каждом из которых поле можно считать однородным. Энергия, заключенная в элементе объема, есть $w_M dV$. Полная энергия любого магнитного поля равна

$$W_M = \int_V w_M dV$$

58. Энергия системы замкнутых контуров с током.

Энергия системы замкнутых контуров равна сумме энергий контуров:

$$W_M = \frac{1}{2}\Sigma_i \Sigma_j L_{ij} I_i I_j$$

Сюда входят коэффициенты самоиндукции и взаимоиндукции (коэффициент снимает двойное учитывание попарных энергий взаимодействия двух контуров).

59. Молекулярные токи и вектор намагниченности.

В реальном веществе всегда есть молекулярные токи, связанные с движением электронов в атомах. Плотность молекулярных токов $\vec{j}_{\text{мол}}$. Эти токи всегда замкнуты, т.е. $div\vec{j} = 0$ (в проводниках электроны образуют молекулярные токи и еще могут двигаться поступательно, т.е. создавать ток проводимости (обыкновенный электрический ток)). Поэтому, если в веществе есть еще ток проводимости, его плотность $\vec{j}_{\text{провод}} \equiv \vec{j}$, то для вектора индукции магнитного поля $\vec{B}$ имеем:

$$\mathrm{rot}\vec{B} = \mu_0(\vec{j} + \vec{j}_{\text{мол}})$$

Молекулярными токами определяется *вектор плотности магнитного момента – вектора намагниченности*:

$$\vec{M} = \frac{1}{\Delta V}\Sigma_{\Delta V}\vec{m}_i = \frac{1}{2\Delta V}\int_{\Delta V}[\vec{r}`, \vec{j}_{\text{мол}}(\vec{r}`)]dV`$$

$$\vec{m}_i - \text{магнитный момент } i^{\text{го}}\text{молекулярного тока}$$

Является аналогом вектора поляризации среды. Величина вектора зависит от индукции внешнего поля и от свойств рассматриваемого вещества.

60. Дайте определение вектора напряженности магнитного поля.

$$\vec{M} = \frac{1}{\Delta V}\Sigma_{\Delta V}\vec{m}_i = \frac{1}{2\Delta V}\int_{\Delta V}[\vec{r}`, \vec{j}_{\text{мол}}(\vec{r}`)]dV`$$

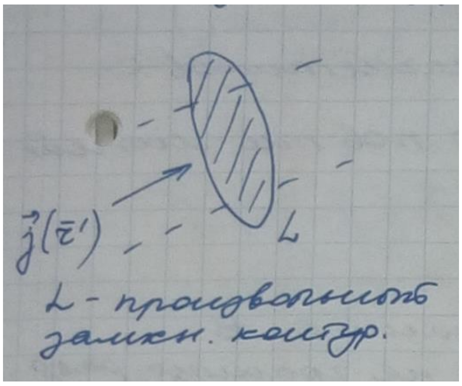
Тогда $\vec{j}_{\text{мол}} = rot\vec{M}$ и $rot\vec{B} = \mu_0(\vec{j} + rot\vec{M}) \to$

$$rot\left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}\right) = \vec{j}, \qquad \vec{j} - \text{плотность тока проводимости}$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} - \text{векор напряженности магнитного поля}$$

Он определяется только токами проводимости: $rot\vec{H} = \vec{j}$

61. ***Сформулируйте теорему о циркуляции вектора напряженности магнитного поля в интегральной и дифференциальной формах.***



Закон о полном токе. В произвольной намагниченной среде циркуляция вектора напряженности магнитного поля $\vec{H}$ по любому замкнутому контуру L равна алгебраической сумме токов I, которые охватываются этим контуром.

$$\int_L (\vec{H}, d\vec{l}) = \Sigma_i(\pm I_i) = I$$

$$I - \text{полный ток проводимости, текущий через } S$$

В дифференциальной форме:

$$rot\vec{H} = \vec{j}, \qquad \vec{j} - \text{объемная плотность тока}$$

Вывод: $\int_L (\vec{H}, d\vec{l}) = \{\text{теорема Стокса}\} = \int_S (rot\,\vec{H}, d\vec{S}) = \int_S (\vec{j}, d\vec{S}) = I$

62. ***Запишите материальные уравнения для магнитного поля. Что характеризуют магнитные восприимчивость и проницаемость вещества.***

Если поля не слишком велики, то связь между $\vec{M}$ и $\vec{H}$ линейная (экспериментальный факт): $\vec{M} = \chi\vec{H}$, где $\vec{H}$ – магнитная восприимчивость среды.

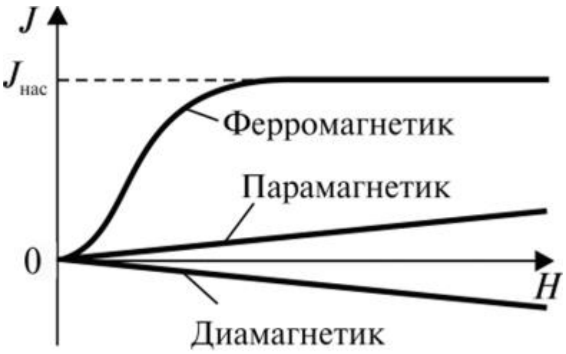
Для изотропных сред $\chi = const$. Тогда $\vec{B} = \mu_0\vec{H} + \mu_0\vec{M} = \mu_0(1+\chi)\vec{H}$

Материальное уравнение связи:

$$\vec{B} = \mu_0\mu\vec{H}$$

$$\mu = 1 + \chi - \text{магнитная проницаемость среды}$$

Магнитная восприимчивость χ – физическая величина, характеризующая связь между магнитным моментом (намагниченностью) вещества и напряженностью магнитного поля в этом веществе.



Магнитная проницаемость μ – коэффициент (зависящий от свойств среды), характеризующий связь между магнитной индукцией и напряженность магнитного поля в веществе

Для изотропных веществ $\mu = const$ и ее будем считать известной из опыта:

$$\mu > 1 - \text{парамагнетики}$$

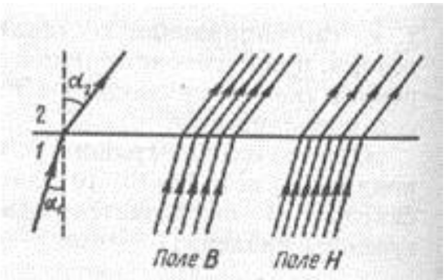
$$\mu < 1 - \text{диамагнетики}$$

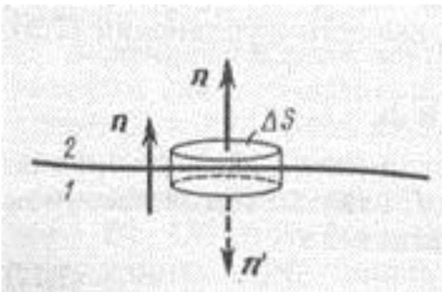
$$\mu \gg 1 - \text{ферромагнетики}$$

(для них связь $\vec{B}$ и $\vec{H}$ нелинейна даже для слабых полей)

Для вакуума $\chi = 0 \rightarrow \mu = 1$.

63. *Граничные условия для векторов напряженности и индукции магнитного поля.*

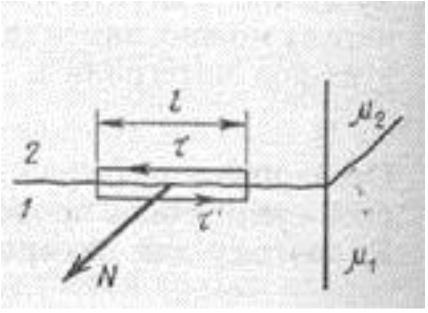




S – граница раздела двух магнетиков с магнитными проницаемостями μ_1 и μ_2. По поверхности протекает ток $i_{пов}$.

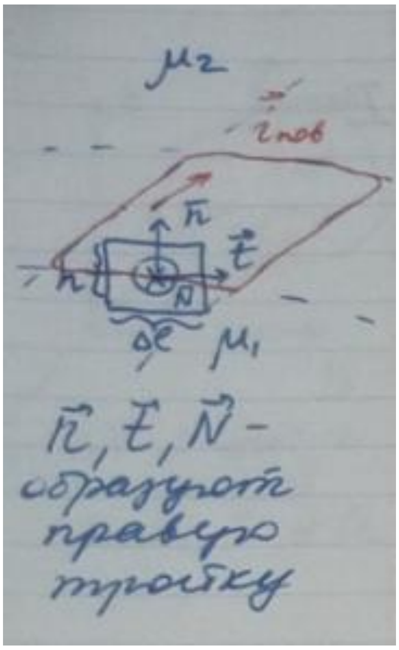
1) Рассмотрим магнитный поток через часть границы ΔS. Так как $div\vec{B} = 0$, или, что то же самое, $B_{1n}\Delta S - B_{2n}\Delta S = 0 \rightarrow B_{1n}|_S = B_{2n}|_S$ (знак противоположный, потому что внешняя нормаль к поверхности противоположно направлена с одним из векторов магнитной индукции). Итак, *нормальные компоненты $\vec{B}$ непрерывны на границе раздела.*

2) Для нормальных составляющих напряженности магнитного поля выполнено: $\frac{H_{1n}|_S}{H_{2n}|_S} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$



3) Применим теорему о циркуляции вектора напряженности к очень малому прямоугольному контуру. Пусть вектор плотности тока совпадает с нормалью $\vec{N}$ к контуру. Так как контур очень узкий, то вклад в циркуляцию на боковых сторонах очень мал. Тогда:

$$H_{2\tau}l - H_{1\tau}l = i_{\text{пов}}l \to H_{2\tau} - H_{1\tau} = i_{\text{пов}}$$



$$\Big(\text{в векторной форме: } \big[\vec{n}, \big(\vec{H}_2 - \vec{H}_1\big)\big]\big|_S = i_{\text{пов}}\vec{N},$$
$$\big|\big[\vec{n}, \big(\vec{H}_2 - \vec{H}_1\big)\big]\big|\big|_S = i_{\text{пов}}\Big)$$

Следует из того, что:

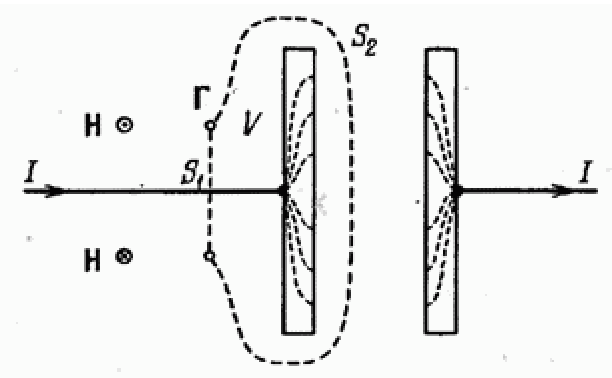
$$\big[\vec{n}, \vec{H}\big] = \big[\vec{n}, \vec{t}\big]H_t = \vec{N}H_t, \big|\big[\vec{n}, \vec{H}\big]\big| = H_t$$

Если же $i_{\text{пов}} = 0$, то

$$\vec{H}_{1\tau}|_S = \vec{H}_{2\tau}|_S$$

$$\frac{1}{\mu_1}\vec{B}_{1\tau}|_S = \frac{1}{\mu_2}\vec{B}_{2\tau}|_S$$

64. Что такое ток смещения?



Постоянный ток в цепи с конденсатором не течет, переменный – протекает. Сила квазистационарного тока во всех элементах цепи, если они соединяются последовательно, одинакова. В конденсаторе, обкладки которого разделяет диэлектрик, ток проводимости, вызванный перемещением электронов, идти не может. Значит, если ток переменный (присутствует переменное электрическое поле), происходит некоторый процесс, который замыкает ток проводимости без переноса заряда между обкладками конденсатора. Этот процесс называют током смещения.

Так как магнитное поле – обязательный признак любого тока, Максвелл назвал переменное электрическое поле *током смещения*. Ток смещения следует отличать от тока проводимости, который вызван движением заряженных частиц (электронов и ионов). Токи смещения появляются только в том случае, если электрическое смещение ($\vec{D}$) переменно. Объемная плотность тока смещения определяется как:

$$\vec{J}_{\text{смещ}} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Вывод.

$$rot\vec{H} = \vec{j}$$

– стационарность электромагнитного поля, которой, естественно, нет места изменяющихся во времени полях:

$$\int_{\Gamma} \vec{H} d\vec{l} \int_{S_1} rot\vec{H}\, d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{j} d\vec{S} = I$$

Проделав такие же вычисления для поверхности S_2, не пересекающей провод с током, придем к явно неверному соотношению

$$\int_{\Gamma} \vec{H} d\vec{l} = \int_{S_2} \vec{j} d\vec{S} = 0$$

Возьмем дивергенцию от обеих частей в уравнении стационарности (теоремы о циркуляции):

$$div\, rot\vec{H} = div\vec{j}$$

Дивергенция ротора всегда равна нулю, но тогда и правая часть равна нулю, что противоречит уравнению непрерывности:

$$div\vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Действительно, при нестационарных процессах ρ может меняться со временем (это, в частности, происходит с плотностью заряда на обкладках заряженного конденсатора). В этом случае $div\vec{j} \neq 0$.

Для согласования уравнения непрерывности и стационарности Максвелл ввел в правую часть уравнения стационарности дополнительное слагаемое, которое назвал плотностью *тока смещения.*

$$rot\vec{H} = \vec{j} + \vec{j}_{\text{смещ}}$$

Сумму тока проводимости и тока смещения принято называть полным током. Плотность полного тока равна

$$\vec{j}_{\text{полн}} = \vec{j} + \vec{j}_{\text{смещ}}$$

Положим $div\vec{j}_{\text{смещ}} = -div\vec{j}$. Тогда, учитывая уравнение непрерывности,

$$div\vec{j}_{\text{смещ}} = \frac{\partial\rho}{\partial t}$$

Так как дивергенция вектора электрического смещения равна плотности сторонних зарядов ($div\vec{D} = \rho$), продифференцировав по времени это выражение:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}div\vec{D} = div\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

Дальше очевидно:

$$div\vec{j}_{\text{смещ}} = div\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \rightarrow \vec{j}_{\text{смещ}} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

Если подставить это в обобщенное уравнение стационарности, получим одно из уравнений Максвелла: $rot\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$.

65. Запишите уравнения Максвелла в дифференциальной форме.

$$div\vec{D} = \rho$$

- электрический заряд является источником электрической индукции (теорема Гаусса для электрического поля)

.

$$div\vec{B} = 0$$

- магнитные заряды не обнаружены (теорема Гаусса для магнитного поля).

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

- изменение магнитной индукции порождает вихревое электрическое поле

$$rot\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

- электрический ток и изменение электрической индукции порождают вихревое магнитное поле.

66. Запишите уравнения Максвелла в интегральной форме.

$$\int_S \vec{D}d\vec{S} = Q$$

- поток электрической индукции через замкнутую поверхность пропорционален величине свободного заряда, находящегося в объеме, ограниченном этой поверхностью (теорема Гаусса для электрического поля).

$$\int_S \vec{B}d\vec{S} = 0$$

- поток магнитной индукции через замкнутую поверхность равен нулю (теорема Гаусса для магнитного поля).

$$\int_L \vec{E}d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}d\vec{S}$$

- изменение потока магнитной индукции, проходящего через замкнутую поверхность S, взятое с обратным знаком, пропорционально циркуляции электрического поля на замкнутом контуре L, который является границей поверхности S.

$$\oint_L \vec{H}d\vec{l} = I + \frac{d}{dt}\int_S \vec{D}d\vec{S}$$

- полный электрический ток свободных зарядов и изменение потока электрической индукции через незамкнутую поверхность S пропорциональны циркуляции магнитного поля на замкнутом контуре L, который является границей поверхности S.

67. Сколько решений имеет система уравнений Максвелла?

Уравнения Максвелла (4 штуки) образуют незамкнутую систему, поэтому у нее бесконечно много решений. Чтобы система уравнений Максвелла образовывала замкнутую систему, надо дополнить ее материальными уравнениями.

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$$
$$\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$$
$$\vec{j} = \lambda(\vec{E} + \vec{E}_c)$$

Только из уравнений Максвелла мы не можем вывести уравнения волны, но добавив к ним свойства материала, соответственно, материальные уравнения, система становится однозначно разрешимой.

68. ***Дайте определение и запишите выражение для вектора Умова – Пойнтинга.***

Вектор Умова – Пойнтинга – вектор плотности потока электромагнитной энергии, определяющий количество электромагнитной энергии, переносимой через единицу площади в единицу времени.

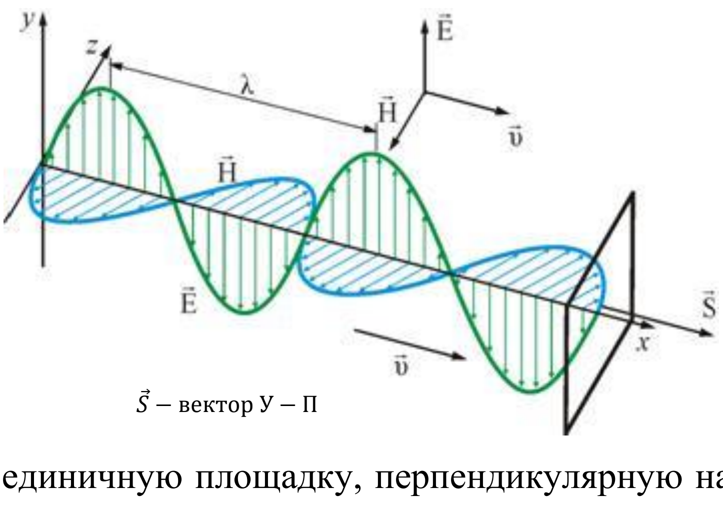
$$\vec{\Pi} = [\vec{E}, \vec{H}] = wc\vec{n}$$

$$\vec{E}, \vec{H} - \text{векторы напряженности электрического и магнитного полей}$$

$$w = \varepsilon\varepsilon_0 E^2 - \text{объемная плотность энергии}$$

$$\vec{n} - \text{единичный вектор, задающий направление распространения волны}$$

$$c - \text{скорость распространения электромагнитной волны}$$



$\vec{S}$ – вектор У – П

Вектор $\vec{\Pi}$ направлен в сторону распространения электромагнитной волны, а его модуль равен энергии, переносимой электромагнитной волной за единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения волны.

Из системы уравнений Максвелла следует теорема Умова – Пойнтинга, выражающая закон сохранения энергии в электромагнитном поле:

$$\frac{dW}{dt} = -\oint_S \vec{\Pi}\, d\vec{S} - N + \int_V \vec{j}\vec{E}_{\text{ст}} dV$$

Здесь $W = \frac{1}{2}\int_V \left(\vec{E}\vec{D} + \vec{H}\vec{B}\right) dV$ – энергия электромагнитного поля в объеме V, ограниченном замкнутой поверхностью S, N – тепловая мощность, выделяемая в объеме V, а последний интеграл выражает работу внешних сил, совершаемую в объеме в единицу времени.

Вывод (считаем для простоты, что среда – вакуум, переход к общему случаю заключается в учете ε и μ в окончательных формулах).

$$\vec{B} rot \vec{E} = -\vec{B}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{E} rot \vec{B} = \vec{E}\mu_0 \vec{j} + \vec{E}\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Вычтем из второго первое.

$$\vec{E} rot \vec{B} - \vec{B} rot \vec{E} = \mu_0 \vec{E}\vec{j} + \varepsilon_0\mu_0\vec{E}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{B}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$-div\left[\vec{E},\vec{B}\right] = \mu_0 \vec{E}\vec{j} + \varepsilon_0\mu_0\vec{E}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{B}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Вводя вектор $\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0}\left[\vec{E},\vec{B}\right] = \left[\vec{E},\vec{H}\right]$, получим окончательно:

$$\mathrm{d}iv\vec{\Pi} + \vec{j}\vec{E} + \varepsilon_0\vec{E}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\vec{B}}{\mu_0}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

Если учесть, что $\vec{E} = \vec{E}_{\text{собств}} - \vec{E}_{\text{ст}}$, получим искомое равенство, записанное в дифференциальной форме.

69. *Получите волновое уравнение из системы уравнений Максвелла.*

Рассмотрим однородную нейтральную непроводящую среду с проницаемостями ε, μ.

Материальные уравнения:

$$\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}, \qquad \vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon\vec{E}$$

Поскольку плотности зарядов и токов равны нулю в данном случае, уравнения Максвелла будут иметь вид:

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \qquad rot\vec{H} = -\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$div\vec{B} = 0, \qquad div\vec{D} = 0$$

Поскольку любые волновые процессы должны подчиняться волновому уравнению, связывающему вторые производные по времени и координатам, попытаемся прийти к нему с помощью вышенаписанных уравнений. Для этого продифференцируем $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$ по времени и используем соседнее:

$$\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = rot \frac{\partial \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}}{\partial t} - \frac{1}{\mu_0 \mu} rotrot\vec{E}$$

$$rotrot\vec{E} = graddiv\vec{E} - \Delta\vec{E} = -\Delta\vec{E}$$

Аналогично можно получить подобное волновое уравнение для вектора $\vec{H}$. Таким образом, мы приходим к идентичным волновым уравнениям для векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$.

$$\Delta\vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\Delta\vec{H} = \varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$

Здесь коэффициент есть не что иное как величина, обратная квадрату скорости v распространения волны: $v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$

70. Что такое плоская волна?

Электромагнитная волна – распространяющееся в пространстве изменение состояния электромагнитного поля.

Плоская волна – это волна, фронт которой имеет форму плоскости (фронт – поверхность, до которой дошли колебания к данному моменту времени).

Плоская электромагнитная волна – частный случай общего решения волнового уравнения.

$$\vec{E} = \vec{E}_A \cos(\omega t - k\zeta), \qquad \vec{H} = \vec{H}_A \cos(\omega t - k\zeta)$$

$$\vec{E}_A - \text{ампитудное значение напряженности электрического поля}$$

$$\vec{H}_A - \text{ампитудное значение напряженности магнитного поля}$$

$$\omega - \text{круговая частота колебаний}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} - \text{волновое число}, \lambda - \text{длина волны}$$

Из уравнений Максвелла следует, что электрическое и магнитное поле плоской монохроматической (синусоидальная, с постоянными во времени частотой, амплитудой и начальной фазой) электромагнитной волны не являются независимыми, а связаны следующими соотношениями:

$$\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}\left[\vec{n},\vec{E}\right]=\sqrt{\mu\mu_0}\vec{H}$$

$\vec{n}$ – единичный вектор, задающий направление распространения волны

Вывод (примем $\rho=0$).

$$div\vec{E}=0,\qquad div\vec{H}=0$$

$$rot\vec{E}=-\mu_0\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t},\qquad rot\vec{H}=\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

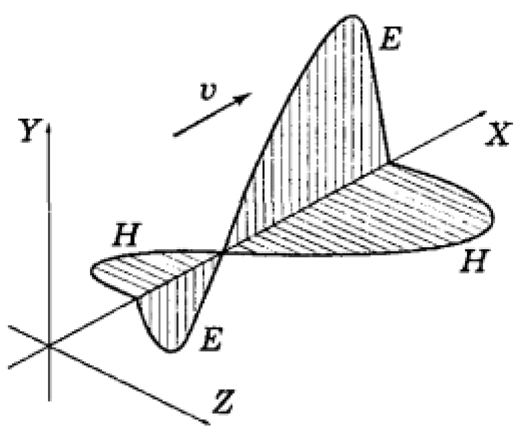
Направим ось X перпендикулярно волновым поверхностям. Тогда проекции полей на оси Y и Z не будут зависеть от координат y,z. Тогда уравнения можно свести к следующим:

$$0=\mu\mu_0\frac{\partial H_x}{\partial t},\qquad 0=\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial E_x}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial H_x}{\partial x}=0$$

$$-\frac{\partial E_z}{\partial x}=-\mu\mu_0\frac{\partial H_y}{\partial t},\qquad -\frac{\partial H_z}{\partial x}=\varepsilon_0\varepsilon\frac{\partial E_y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x}=-\mu\mu_0\frac{\partial H_z}{\partial t},\qquad \frac{\partial H_y}{\partial x}=\varepsilon_0\varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial t}$$



Тогда, так как волна распространяется в положительном направлении:

$$E_y=E_y\left(t-\frac{x}{v}\right),$$

$$H_z=H_z(t-\frac{x}{v})$$

Введем обозначения:

$$\varphi=t-\frac{x}{v}$$

Тогда $\frac{\partial E_y}{\partial x}=\frac{\partial E_y}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial E_y}{\partial\varphi}\left(-\frac{1}{v}\right)$, $\frac{\partial H_z}{\partial x}=\frac{\partial H_z}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\frac{\partial H_z}{\partial\varphi}$

Подставив эти выражения в соответствующие уравнения системы, получим:

$$\frac{1}{v}\frac{\partial E_y}{\partial \varphi} = \mu_0\mu\frac{\partial H_z}{\partial \varphi}$$

Учитывая то, что $v = \frac{1}{\sqrt{\mu_o\mu}}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}}$:

$$\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}\frac{\partial E_y}{\partial \varphi} = \sqrt{\mu_o\mu}\frac{\partial H_z}{\partial \varphi}$$

$$\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}E_y = \sqrt{\mu_o\mu}H_z + C$$

Так как принято, что фазы волн совпадают, то окончательно

$$\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}E_y = \sqrt{\mu_o\mu}H_z$$

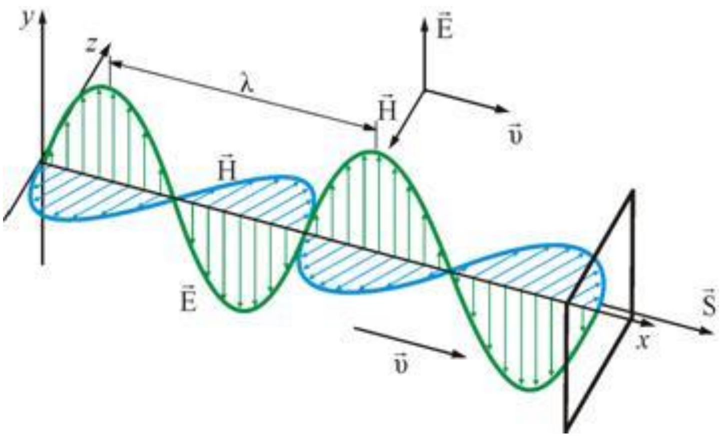
Это соответствует написанному выше равенству, расписанному по координатам в описанной системе.

71. ***Нарисуйте взаимную ориентацию полевых векторов и волнового вектора в плоской волне.***

Волновой вектор – вектор, направленный в сторону распространения волны:

$$\vec{v} = \frac{[\vec{E},\vec{H}]}{|[\vec{E},\vec{H}]|}$$

Полевые векторы $\vec{E},\vec{H}$ и вектор $\vec{v}$ образуют правую тройку векторов.



72. ***Чему равна плотность потока энергии электромагнитной волны?***

Плотность потока энергии электромагнитной энергии – энергия, переносимая волной за единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения волны. Характеризуется вектором Умова – Пойнтинга:

$$\vec{\Pi} = [\vec{E}, \vec{H}] = wc\vec{n} = \frac{\Delta W}{s\Delta t},$$

$$w = \varepsilon_0 \varepsilon E^2 - \text{объемная плотность энергии}$$

Здесь s - площадь выделенной площадки, ориентированной перпендикулярно направлению распространения волны.

73. Обоснуйте возможность введения скалярного и векторного потенциалов нестационарного электромагнитного поля.

$$(1)\, rot\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial D}{\partial t}$$

$$(2)\, rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$(3)\, div\vec{B} = 0$$

$$(4)\, div\vec{D} = \rho$$

Заметим, что уравнение (3) – тождество, если положить $\vec{B} = rot\vec{A}(\vec{r}, t)$.

$\vec{A}$ - векторное поле, называемое *векторным потенциалом магнитного поля.*

Обычно считается, что векторный потенциал — величина, не имеющая непосредственного физического смысла, вводимая лишь для удобства выкладок. Однако удалось поставить эксперименты, показавшие, что векторный потенциал доступен непосредственному измерению. Подобно тому, как электростатический потенциал связан с понятием энергии, векторный потенциал обнаруживает тесную связь с понятием импульса.

Подставим это выражение в (2), поменяем операцию ротора и производной по времени местами, перенесем все в левую часть и воспользуемся линейностью ротора, получим:

$$rot\left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = 0$$

Полученное соотношение представляет собой локальное условие потенциальности суммарного векторного поля $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$.

Это приводит к соотношению:

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - grad\varphi,$$

$$\varphi = \varphi(\vec{r}, t) - \text{скалярный потенциал электромагнитного поля}$$

74. *Запишите условие калибровки Лоренца.*

Калибровка векторного потенциала – наложение дополнительных инвариантных условий, позволяющих однозначно вычислить векторный потенциал электромагнитного поля для решения тех или иных задач. Требование калибровочной инвариантности – требование о том, чтобы физическое содержание калибровочных уравнений зависело только от напряженности и индукции электромагнитного поля и оставалось неизменным при всех преобразованиях потенциалов поля.

Калибровка Лоренца:

$$div\vec{A} + \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0,$$

$$\varphi - \text{скалярный потенциал электромагнитного поля}$$

Такая калибровка может иметь место. Предположим, что данному электрическому и магнитному полю соответствуют потенциалы, которые не удовлетворяют этому условию. Точнее, в правой части калибровочного условия оказывается не ноль, а некоторая функция $g = g(\vec{r}, t)$. Тогда, проведя замены потенциалов, при помощи функции f, которая удовлетворяет уравнению $d^2 f = g$, можно добиться равенства нулю калибровочного условия Лоренца:

$$\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\varphi - \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}\frac{\partial f}{\partial t}\right) + div\left(\vec{A} + gradf\right) =$$

$$= \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\frac{\partial\varphi}{\partial t} + div\vec{A} - d^2 f = g - d^2 f = 0$$

75. *Запишите уравнения для векторного и скалярного потенциалов электромагнитного поля.*

$$\Delta\vec{A} - \mu\mu_0\varepsilon_0\varepsilon\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\mu\vec{j}(\vec{r}, t)$$

$$\Delta\varphi - \mu\mu_0\varepsilon_0\varepsilon\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho(\vec{r}, t)}{\varepsilon_0\varepsilon}$$

В другой форме (СГС):

$$\Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{r}, t)$$

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho$$

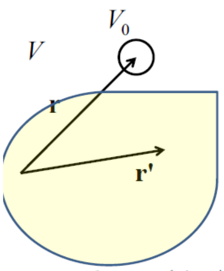
76. Какой вид имеют решения уравнения для векторного и скалярного потенциалов электромагнитного поля?

$$\varphi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\oint_S \frac{\rho\left(\vec{r}',t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{v}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}`|}d\vec{r}`$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0\mu}{4\pi}\int_V \frac{\vec{j}\left(\vec{r}',t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{v}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}`|}d\vec{r}`$$

Надо убедиться, что выписанные выше формулы для скалярного и векторного потенциалов действительно являются решениями волновых уравнений и что они удовлетворяют условию калибровки

$$\Delta\varphi - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\rho(\mathbf{r},t)/\varepsilon\varepsilon_0 \Rightarrow \varphi(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\oint\frac{\rho(\mathbf{r}',t-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/v)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\mathbf{r}'$$



$$\varphi(\mathbf{r},t) = \underline{\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\int_{V_0\to 0}\frac{\rho(\mathbf{r}',t-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/v)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\mathbf{r}'} + \underline{\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\int_V\frac{\rho(\mathbf{r}',t-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/v)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\mathbf{r}'} = \varphi_1+\varphi_2$$

Оператор Даламбера $\square = \Delta - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$

$\square\varphi_2 = 0$ Действительно $\mathbf{r}-\mathbf{r}'$ ограничено снизу

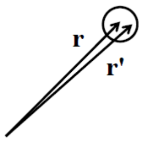
$$\Rightarrow \underline{\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\square\int_V\frac{\rho(\mathbf{r}',t-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/v)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\mathbf{r}'} = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\int_V\underbrace{\square\left(\frac{\rho(\mathbf{r}',t-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/v)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)}_{=0}d\mathbf{r}' = 0$$

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_{V_0\to 0}\frac{\rho(\mathbf{r}',t-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/v)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\mathbf{r}' =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{1}{v^2}\int_{V_0\to 0}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\rho(\mathbf{r}',t-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/v)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\mathbf{r}' = \Rightarrow$$

$$\Rightarrow = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\rho(\tilde{\mathbf{r}},t-\tilde{R}/v)\int_{V_0\to 0}\frac{4\pi R^2}{R}dR \quad = 0$$

$$\tilde{\mathbf{R}} = \tilde{\mathbf{r}}-\mathbf{r}' \qquad \mathbf{R} = \mathbf{r}-\mathbf{r}'$$



$$\Delta\psi = \operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi_1 = \lim_{V_0\to 0}\frac{1}{V_0}\oint_{S_0}\operatorname{grad}(\varphi_1)d\mathbf{S}_0 \Rightarrow$$

$$\operatorname{grad}\varphi_1 = \operatorname{grad}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\int_{V_0\to 0}\frac{\rho(\mathbf{r}',t-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/v)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\mathbf{r}'\right)$$

$$\operatorname{grad}\varphi_1 = \operatorname{grad}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\int_{V_0\to 0}\frac{\rho(\mathbf{r}',t-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/v)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\mathbf{r}'\right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\int_{V_0\to 0}\operatorname{grad}\left(\frac{\rho(\mathbf{r}',t-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/v)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)d\mathbf{r}' =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\int_{V_0\to 0}\frac{\operatorname{grad}\{\rho(\mathbf{r}',t-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/v)\}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\mathbf{r}'}_{=0} - \underline{\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\int_{V_0\to 0}\rho(\mathbf{r}',t-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/v)\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}d\mathbf{r}'}$$

т.к. $\int_{V_0\to 0}\frac{\operatorname{grad}\{\rho(\mathbf{r}',t-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/v)\}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\mathbf{r}' = \operatorname{grad}\rho(\tilde{\mathbf{r}},t-\tilde{R}/v)\int_{V_0\to 0}\frac{4\pi R^2 dR}{R|}\to 0$

$\mathbf{R} = \mathbf{r}-\mathbf{r}'$

$\tilde{\mathbf{R}} = \tilde{\mathbf{r}}-\mathbf{r}'$

$$\Rightarrow \operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi_1 = \lim_{V_0\to 0}\frac{1}{V_0}\oint_{S_0}\underline{\operatorname{grad}(\varphi_1)}d\mathbf{S}_0 = -\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\times$$

$$\times\lim_{V_0\to 0}\frac{1}{V_0}\oint_{S_0}\int_{V_0\to 0}\frac{\rho(\mathbf{r}',t-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/v)(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}d\mathbf{S}_0 d\mathbf{r}' =$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\times\lim_{V_0\to 0}\frac{1}{V_0}\int_{V_0\to 0}\rho(\mathbf{r}',t-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/v)d\mathbf{r}'\underbrace{\int_{S_0}\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')d\mathbf{S}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}}_{=4\pi} \Rightarrow$$

Меняем порядок интегрирования

$$\Rightarrow \Delta\varphi_1 = -\frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\times\lim_{V_0\to 0}\frac{1}{V_0}\int_{V_0\to 0}\rho(\mathbf{r}',t-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/v)d\mathbf{r}' =$$

$$= -\frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\times\lim_{V_0\to 0}\rho(\tilde{\mathbf{r}},t-\tilde{R}/v)\frac{1}{V_0}\int_{V_0\to 0}d\mathbf{r}' =$$

$\mathbf{R} = \mathbf{r}-\mathbf{r}'$

$\tilde{\mathbf{R}} = \tilde{\mathbf{r}}-\mathbf{r}'$

$$= -\frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\times\lim_{V_0\to 0}\rho(\tilde{\mathbf{r}},t-\tilde{R}/v) =$$

$$= -\frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\times\lim_{V_0\to 0}\rho(\tilde{\mathbf{r}},t-|\tilde{\mathbf{r}}-\mathbf{r}'|/v) = -\frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\rho(\mathbf{r},t)$$

$$V_0\to 0 \leftrightarrow \tilde{\mathbf{r}}\to\mathbf{r},\quad \mathbf{r}'\to\mathbf{r}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned}&\Delta\varphi - \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\rho(\mathbf{r},t)/\varepsilon\varepsilon_0 \quad && \varphi(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\oint\frac{\rho(\mathbf{r}',t-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/v)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\mathbf{r}'\\ &\Delta\mathbf{A} - \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu\mu_0\mathbf{j}(\mathbf{r},t) \quad && \mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\oint\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}',t-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/v)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\mathbf{r}'\end{aligned}}$$

77. Векторный и скалярный потенциалы электромагнитного поля электронейтральной системы движущихся зарядов на больших расстояниях от нее.

$$\varphi(\vec{r},t) \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} div \frac{\vec{p}\left(t-\frac{r}{v}\right)}{r}$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) \approx \frac{\mu_0\mu}{4\pi} \frac{\partial \vec{p}\left(t-\frac{r}{v}\right)}{\partial t}$$

Вывод.

$$\operatorname{div}\mathbf{A}(\mathbf{r},t)+\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0\partial\varphi(\mathbf{r},t)/\partial t=0 \;?$$

$$\operatorname{div}\mathbf{A}(\mathbf{r},t)=\frac{\mu\mu_0}{4\pi}\oint \operatorname{div}\left(\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}',t-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/v)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)d\mathbf{r}'$$

$$\operatorname{div}\psi\mathbf{a}=\psi\operatorname{div}\mathbf{a}+\mathbf{a}\cdot\operatorname{grad}\psi \qquad \operatorname{div}\mathbf{F}(f(\mathbf{r}))=\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial f}\operatorname{grad}f(\mathbf{r})$$

$$t'(\mathbf{r})=t-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/v$$

$$\operatorname{div}\left(\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}',t')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)=\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\operatorname{div}\mathbf{j}(\mathbf{r}',t')+\mathbf{j}(\mathbf{r}',t')\operatorname{grad}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}=$$

$$=\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\frac{\partial\mathbf{j}(\mathbf{r}',t')}{\partial t'}\left(-\frac{1}{v}\right)\operatorname{grad}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|+\mathbf{j}(\mathbf{r}',t')\operatorname{grad}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

$$\operatorname{div}'\left(\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}',t')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)=\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\operatorname{div}'\mathbf{j}(\mathbf{r}',t')_{t'=\mathrm{const}}+$$

Сложем две дивергенции. Подчеркнутые одним цветом слагаемые отличаются знаком

$$+\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\frac{\partial\mathbf{j}(\mathbf{r},t')}{\partial t'}\left(-\frac{1}{v}\right)\operatorname{grad}'|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|+\mathbf{j}(\mathbf{r},t')\cdot\operatorname{grad}'\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

Сложим две дивергенции

$$\operatorname{div}\left(\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}',t')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)+\operatorname{div}'\left(\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}',t')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)=\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\operatorname{div}'\mathbf{j}(\mathbf{r}',t')_{t'=\mathrm{const}}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{A}(\mathbf{r},t)=\frac{\mu\mu_0}{4\pi}\oint\operatorname{div}\left(\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}',t')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)d\mathbf{r}'=-\frac{\mu\mu_0}{4\pi}\oint\operatorname{div}'\left(\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}',t')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)d\mathbf{r}'+$$

$$+\frac{\mu\mu_0}{4\pi}\oint\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\operatorname{div}'\mathbf{j}(\mathbf{r}',t')_{t'=\mathrm{const}}d\mathbf{r}'= \qquad t'=t-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/v$$

$$=-\underbrace{\frac{\mu\mu_0}{4\pi}\oint_S\frac{j_n(\mathbf{r}',t')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dS}_{=0}+\frac{\mu\mu_0}{4\pi}\oint\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\operatorname{div}'\mathbf{j}(\mathbf{r}',t')_{t'=\mathrm{const}}d\mathbf{r}'$$

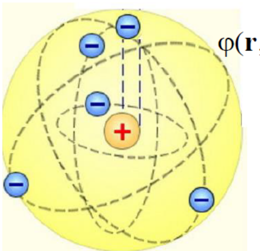
Вычислим теперь

$$\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial\varphi(\mathbf{r},t)}{\partial t}=\frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\oint\frac{\rho(\mathbf{r}',t')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\mathbf{r}'=\frac{\mu\mu_0}{4\pi}\oint\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\frac{\partial\rho(\mathbf{r}',t')}{\partial t'}d\mathbf{r}'$$

Сложим подчеркнутые красной чертой слагаемые

$$\operatorname{div}\mathbf{A}(\mathbf{r},t)+\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial\varphi(\mathbf{r},t)}{\partial t}=$$

$$=\frac{\mu\mu_0}{4\pi}\oint\underbrace{\left\{\frac{\partial\rho(\mathbf{r}',t')}{\partial t'}+\operatorname{div}'\mathbf{j}(\mathbf{r}',t')\right\}}_{=0}\frac{d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}=0$$



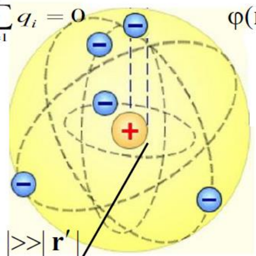
$$\varphi(\mathbf{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\mathbf{r}',t-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/v)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\mathbf{r}'$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t)=\frac{\mu\mu_0}{4\pi}\int\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}',t-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/v)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\mathbf{r}'$$

$$\mathbf{E}=-\partial\mathbf{A}(\mathbf{r},t)/\partial t-\operatorname{grad}\varphi(\mathbf{r},t)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t)=\operatorname{rot}\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$$

$$\sum_{i=1}^{n}q_i=0$$



$\mathbf{r}\,|>>|\,\mathbf{r}'|$

$\mathbf{r}$

$$\varphi(\mathbf{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\mathbf{r}',t-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/v)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\mathbf{r}'$$

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\approx r-\frac{\mathbf{r}\mathbf{r}'}{r}$$

$$\varphi(\mathbf{r},t)\approx\underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}\oint\rho(\mathbf{r}',t-r/v)d\mathbf{r}'}_{=0}-$$

$$-\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\oint\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\rho(\mathbf{r}',t-r/v)}{r}\right)d\mathbf{r}'$$

$$\varphi(\mathbf{r},t)\approx-\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{\mathbf{r}}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\oint\mathbf{r}'\rho(\mathbf{r}',t-r/v)d\mathbf{r}'\right)=$$

$$=-\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{\mathbf{r}}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\mathbf{p}(t-r/v)}{r}\right)=-\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(-\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{r^3}+\frac{\mathbf{r}}{r^2}\frac{\partial\mathbf{p}}{\partial r}\right)=$$

$$=-\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(\mathbf{p}\cdot\operatorname{grad}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r}\operatorname{div}\mathbf{p}\right)\Rightarrow \quad ?$$

$$\frac{\mathbf{r}}{r}\frac{\partial\mathbf{p}}{\partial r}=\frac{x}{r}\frac{\partial p_x}{\partial r}+\frac{y}{r}\frac{\partial p_y}{\partial r}+\frac{z}{r}\frac{\partial p_z}{\partial r}=\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial p_x}{\partial r}+\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial p_y}{\partial r}+\frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial p_z}{\partial r}=\operatorname{div}\mathbf{p}$$

$$\varphi(\mathbf{r},t)\approx-\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(\mathbf{p}\cdot\operatorname{grad}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r}\operatorname{div}\mathbf{p}\right)=-\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\operatorname{div}\left(\frac{\mathbf{p}(t-r/v)}{r}\right)$$

$$\operatorname{div}\alpha\mathbf{a}=\mathbf{a}\cdot\operatorname{grad}\alpha+\alpha\operatorname{div}\mathbf{a}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t)=\frac{\mu\mu_0}{4\pi}\oint\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}',t-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/v)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\mathbf{r}'\approx\frac{\mu\mu_0}{4\pi}\oint\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}',t-r/v)}{r}d\mathbf{r}'=$$

$$=\frac{\mu\mu_0}{4\pi r}\oint\mathbf{j}(\mathbf{r}',t-r/v)d\mathbf{r}'\Rightarrow \textit{приводится к}\Rightarrow\frac{\mu\mu_0}{4\pi r}\frac{\partial\mathbf{p}(t-r/v)}{\partial t}$$

$$\mathbf{a}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{p}=-\mathbf{a}\int_V\mathbf{r}'\operatorname{div}'\mathbf{j}(\mathbf{r}',t-r/v)d\mathbf{r}'=-\int_V\mathbf{a}\mathbf{r}'\operatorname{div}'\mathbf{j}(\mathbf{r}',t-r/v)d\mathbf{r}'=$$

$$=-\int_V\operatorname{div}'((\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}')\mathbf{j})d\mathbf{r}'+\int_V\mathbf{j}\operatorname{grad}'(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}')d\mathbf{r}'=$$

$$\operatorname{grad}'(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}')=\mathbf{a}$$

$$=-\underbrace{\int_S(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}')j_n d\mathbf{r}'}_{=0}+\mathbf{a}\int_V\mathbf{j}(\mathbf{r}',t-r/v)d\mathbf{r}'$$

$$\operatorname{div}\alpha\mathbf{a}=\mathbf{a}\cdot\operatorname{grad}\alpha+\alpha\operatorname{div}\mathbf{a}$$

$$\boxed{\varphi(\mathbf{r},t)\approx-\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\operatorname{div}\left(\frac{\mathbf{p}(t-r/v)}{r}\right) \qquad \mathbf{A}(\mathbf{r},t)\approx\frac{\mu\mu_0}{4\pi r}\frac{\partial\mathbf{p}(t-r/v)}{\partial t}}$$

78. *Запишите выражения для напряженностей электрического и магнитного полей, создаваемых электронейтральной системой движущихся зарядов на больших расстояниях от нее.*

$$\vec{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t} rot\, \vec{p}_0 f(\vec{r}, t)$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} rot\, rot \vec{p}_0 f(r, t)$$

Вывод.

Вычислим **B** и **E** $\qquad \dfrac{\mathbf{p}(t - r/v)}{r} = \mathbf{p}_0 f(\mathbf{r}, t)$

$$\varphi(\mathbf{r}, t) \approx -\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\operatorname{div}\mathbf{p}_0 f(\mathbf{r}, t) \qquad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \approx \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{p}_0 f(\mathbf{r}, t)$$

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\operatorname{rot}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{p}_0 f(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\mathbf{p}_0 f(\mathbf{r}, t)$$

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \partial\mathbf{A}/\partial t = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{p}_0 f(r, t) - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{p}_0 f(r, t) =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{p}_0 f(r, t) + \underbrace{\Delta\mathbf{p}_0 f(r, t) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{p}_0 f(r, t)}_{=0}\right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{p}_0 f(r, t) \qquad \frac{\mathbf{p}(t - r/v)}{r} = \mathbf{p}_0 f(\mathbf{r}, t)$$

79. *Запишите выражения для напряженностей электрического и магнитного полей, создаваемых электронейтральной системой движущихся зарядов, дипольный момент которой меняется по гармоническому закону, на больших (по сравнению с длиной волны) расстояниях от нее.*

$$E_\theta = \frac{p_0 sin\theta}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{i\omega}{rv} - \frac{\omega^2}{v^2}\right)\exp\left(i\omega\left(t - \frac{r}{v}\right)\right)$$

$$E_r = \frac{p_0 cos\theta}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}\left(\frac{1}{r} + \frac{i\omega}{v}\right)\exp\left(i\omega\left(t - \frac{r}{v}\right)\right)$$

$$E_\alpha = 0$$

$$B_\alpha = \frac{i\mu\mu_0\omega p_0 sin\theta}{4\pi r v}\left(\frac{1}{r}+\frac{i\omega}{v}\right)\exp\left(i\omega\left(t-\frac{r}{v}\right)\right)$$

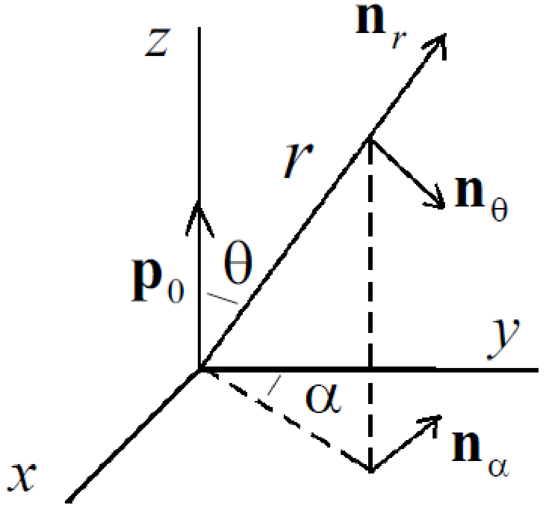
$$B_r = B_\theta = 0$$

При $\lambda \ll r \rightarrow \frac{1}{r} \ll \frac{\omega}{v}$

$$H_\alpha = -\frac{\omega^2 p_0 sin\theta}{4\pi r v}\exp\left(i\omega\left(t-\frac{r}{v}\right)\right)$$

$$E_\theta = -\frac{p_0\omega^2 sin\theta}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r v^2}\exp\left(i\omega\left(t-\frac{r}{v}\right)\right)$$

Вывод.



$$p_{0r} = p_0\cos\theta$$

$$p_{0\theta} = -p_0\sin\theta$$

$$p_{0\alpha} = 0$$

$$\frac{\mathbf{p}(t-r/v)}{r} = \mathbf{p}_0 f(\mathbf{r},t) = \mathbf{p}_0\frac{\exp[i\omega(t-r/v)]}{r}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{p}_0 f = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\cdot p_{0\alpha}f)-\frac{\partial}{\partial\alpha}(p_{0\theta}f)\right]\mathbf{n}_r +$$
$$+\frac{1}{r}\left[\sin\theta\frac{\partial}{\partial\alpha}(p_{0r}f)-\frac{\partial}{\partial r}(rp_{0\alpha}f)\right]\mathbf{n}_\theta +$$
$$+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rp_{0\theta}f)-\frac{\partial}{\partial\theta}(p_{0r}f)\right]\mathbf{n}_\alpha$$

$$\boxed{\begin{array}{c} p_{0r} = p_0\cos\theta \\ p_{0\theta} = -p_0\sin\theta \\ p_{0\alpha} = 0 \end{array}}$$

$$f(\mathbf{r},t) = \frac{\exp[i\omega(t-r/v)]}{r} \qquad \frac{\partial}{\partial r}f(\mathbf{r},t) = -\frac{1}{r}f-\frac{i\omega}{v}f$$

$$\Rightarrow \quad (\operatorname{rot}\mathbf{p}_0 f)_r = 0 \qquad (\operatorname{rot}\mathbf{p}_0 f)_\theta = 0$$

$$(\operatorname{rot}\mathbf{p}_0 f)_\alpha = \frac{1}{r}\left[-\frac{\partial}{\partial r}(rp_0\sin\theta\cdot f)+p_0\sin\theta\cdot f\right] = -p_0\sin\theta\frac{\partial f}{\partial r} =$$
$$= \frac{p_0\sin\theta}{r}\left(\frac{1}{r}+\frac{i\omega}{v}\right)\exp\left(i\omega(t-r/v)\right)$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{p}_0 f = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\underline{(\operatorname{rot}\mathbf{p}_0 f)_\alpha}\right)-\frac{\partial}{\partial\alpha}\cancel{(\operatorname{rot}\mathbf{p}_0 f)_\theta}\right]\mathbf{n}_r +$$
$$+\frac{1}{r}\left[\sin\theta\cancel{\frac{\partial}{\partial\alpha}(\operatorname{rot}\mathbf{p}_0 f)_r}-\frac{\partial}{\partial r}\left(r\underline{(\operatorname{rot}\mathbf{p}_0 f)_\alpha}\right)\right]\mathbf{n}_\theta +$$
$$+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\cancel{\left(r(\operatorname{rot}\mathbf{p}_0 f)_\theta\right)}-\frac{\partial}{\partial\theta}\cancel{(\operatorname{rot}\mathbf{p}_0 f)_r}\right]\mathbf{n}_\alpha$$

— $(\operatorname{rot}\mathbf{p}_0 f)_r = 0$

— $(\operatorname{rot}\mathbf{p}_0 f)_\theta = 0$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\operatorname{rotrot}\mathbf{p}_0 f(r,t) \quad \Rightarrow \quad E_\alpha = 0$$

$$E_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\underbrace{\frac{p_0\sin\theta}{r}\left(\frac{1}{r}+\frac{i\omega}{v}\right)\exp\left(i\omega(t-r/v)\right)}_{(\operatorname{rot}\mathbf{p}_0 f)_\alpha}\right) =$$
$$= \frac{p_0\cos\theta}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}\left(\frac{1}{r}+\frac{i\omega}{v}\right)\exp\left(i\omega(t-r/v)\right)$$

$$E_\theta = -\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\cdot\frac{p_0\sin\theta}{r}\left(\frac{1}{r}+\frac{i\omega}{v}\right)\exp(i\omega(t-r/v))\right)=$$

$$=-\frac{p_0\sin\theta}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}\left(-\frac{1}{r^2}-\frac{i\omega}{v}\left(\frac{1}{r}+\frac{i\omega}{v}\right)\right)\exp(i\omega(t-r/v))=$$

$$=\frac{p_0\sin\theta}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}\left(\frac{1}{r^2}+\frac{i\omega}{rv}-\frac{\omega^2}{v^2}\right)\exp(i\omega(t-r/v))$$

$$(\mathrm{rot}\,\mathbf{p}_0 f)_r = 0 \qquad (\mathrm{rot}\,\mathbf{p}_0 f)_\theta = 0$$

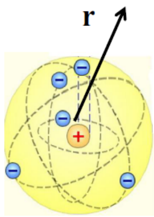
$$\mathbf{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\,\mathbf{p}_0 f(\mathbf{r},t)$$

$$(\mathrm{rot}\,\mathbf{p}_0 f)_\alpha = \frac{p_0\sin\theta}{r}\left(\frac{1}{r}+\frac{i\omega}{v}\right)\exp(i\omega(t-r/v))$$

$$B_\alpha = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p_0\sin\theta}{r}\left(\frac{1}{r}+\frac{i\omega}{v}\right)\exp(i\omega(t-r/v))\right)= \qquad B_r = 0$$

$$=\frac{i\mu\mu_0\omega p_0\sin\theta}{4\pi r v}\left(\frac{1}{r}+\frac{i\omega}{v}\right)\exp(i\omega(t-r/v)) \qquad B_\theta = 0$$

$$\mathbf{B}=\{0,0,B_\alpha\} \qquad \mathbf{E}=\{E_r,E_\theta,0\} \Longrightarrow \mathbf{B}\perp\mathbf{E}$$



$$|\mathbf{r}| >> |\mathbf{r}'|$$

$$\lambda << r \Longleftrightarrow \frac{1}{r} << \frac{\omega}{v}$$

$$H_\alpha = -\frac{\omega^2 p_0\sin\theta}{4\pi r v}\exp(i\omega(t-r/v))$$

$$E_\theta = -\frac{p_0\omega^2\sin\theta}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r v^2}\exp(i\omega(t-r/v))$$

$$\mathbf{S}=[\mathbf{E}\times\mathbf{H}]$$

$$S_r = \mathrm{Re}\{E_\theta\}\mathrm{Re}\{H_\alpha\} = \frac{\omega^4 p_0^2\sin^2\theta}{16\pi^2\varepsilon\varepsilon_0 r^2 v^3}\cos^2(\omega(t-r/v))$$

$$< S_r > = \frac{\omega^4 p_0^2\sin^2\theta}{16\pi^2\varepsilon\varepsilon_0 r^2 v^3} < \cos^2(\omega(t-r/v)) > = \frac{\omega^4 p_0^2\sin^2\theta}{32\pi^2\varepsilon\varepsilon_0 r^2 v^3}$$

80. ***Чему равна средняя мощность, излучаемая электронейтральной системой движущихся зарядов, дипольный момент которой меняется по гармоническому закону, на больших (по сравнению с длиной волны) расстояниях от нее?***

$$< S_r > = \frac{\omega^4 p_0^2 \sin^2\theta}{16\pi^2\varepsilon\varepsilon_0 r^2 v^3} < \cos^2\left(\omega\left(t-\frac{r}{v}\right)\right) > = \frac{\omega^4 p_0^2 \sin^2\theta}{32\pi^2\varepsilon\varepsilon_0 r^2 v^3}$$

Вывод указан выше.

81. ***Дайте определение квазистационарных электромагнитных процессов. Приведите примеры расчета тока в электрических цепях при переходных процессах (RC- и RL-цепи).***

Квазистационарный процесс - процесс, протекающий в ограниченной системе так быстро, что за время распространения этого процесса в пределах системы ее состояние не успевает измениться. Поэтому при рассмотрении процесса можно пренебречь временем его распространения в пределах системы. К квазистационарным электромагнитным процессам относятся процессы, в которых можно пренебречь токами смещения.

1) RC – цепь

$$I(0) = 0$$

$$U_C = \frac{q}{C} \text{ — падение напряжения на конденсаторе}$$

$$U_R = IR \text{ — падение напряжения на резисторе}$$

$$\mathcal{E} = \frac{q}{C} + IR \text{ — правило Кирхгофа}$$

Учитывая, что $I = \frac{dq}{dt}$:

$$q = \mathcal{E}C - \mathcal{E}C^{-\frac{t}{RC}} \rightarrow I = \frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$$

2) RL – цепь

$$I(0) = 0$$

$$\mathcal{E} = IR + L\frac{dI}{dt} \rightarrow I = -\frac{L}{R}\frac{dI}{dt}$$

Решая дифференциальное уравнение, получим:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} + Ce^{-\frac{Rt}{L}}$$

82. *Собственные колебания в колебательном контуре. Амплитуда и начальная фаза при гармонических колебаниях.*

Собственные колебания – это такие колебания, которые совершаются за счет энергии, сообщенной колебательной системе в начальный момент времени, при отсутствии дальнейшего внешнего воздействия на систему.

Колебательный контур – электрическая цепь, содержащая соединенные катушку индуктивности и конденсатор. В такой цепи могут возбуждаться колебания тока.

Пусть конденсатор заряжен до напряжения U_0, тогда энергия конденсатора:

$$E_C = \frac{CU_0^2}{2}$$

При соединении конденсатора с катушкой из-за разности потенциалов на обкладках конденсатора в цепи потечет ток I, что вызовет в катушке ЭДС самоиндукции, направленной на уменьшение тока. Ток, вызванный ЭДС в начальный момент времени будет равен току разряда конденсатора, то есть результирующий ток равен нулю.

В этот момент энергия катушки: $E_L = 0$

Затем ток будет возрастать, а конденсатор разряжаться.

В итоге:

$$E_C = 0, \qquad E_L = \frac{LI_0^2}{2}$$

После этого начнется перезарядка конденсатора.

Напряжение, возникающее в катушке при изменении протекающего тока равно:

$$U_L = -L\frac{dI_L}{dt}$$

Ток, вызванный изменением напряжения на конденсаторе равен:

$$I_C = C\frac{dU_c}{dt}$$

$$U_L = U_C, \qquad I_L = I_C$$

Напряжение возникает на катушке вследствие его падения на конденсаторе, а ток, вызванный конденсатором, проходит через катушку.

Одно из уравнений дифференцируем и подставляем во второе:

$$\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{I}{LC} = 0 - \text{уравнение свободных колебаний в контуре}$$

Решение его имеет вид:

$$I = I_0\sin(\omega t + \varphi)$$

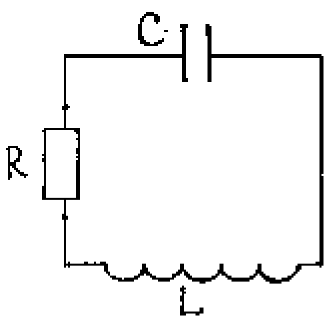
$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} - \text{циклическая частота}$$

$$I_0 - \text{амплитуда колебаний}$$

$$\varphi - \text{начальная фаза}$$

83. Уравнение затухающих колебаний и его решение, время затухания.

Затухающими колебаниями называются колебания, амплитуда которых из-за потерь энергии колебательной системой с течением времени уменьшается.



По правилу Кирхгофа:

$$IR + \frac{q}{C} = -L\frac{dI}{dt}$$

$$\frac{dq}{dt}R + \frac{q}{C} = -L\frac{d^2q}{dt^2}$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta\frac{dq}{dt} + \omega_0^2q = 0$$

$$\beta = \frac{R}{2L} - \text{коэффициент затухания}$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} - \text{частота незатухающих свободных колебаний}$$

в отсутствии потерь энергии в колебательной системе

Решение дифференциального уравнения или *уравнение колебаний для заряда* на обкладках конденсатора имеет вид:

$$q = q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_{\text{зат}} t + \alpha)$$

или

$$q = q_0 e^{-\beta t} \sin(\omega_{\text{зат}} t + \alpha_1)$$

Частота затухающих колебаний в RLC – контуре:

$$\omega_{\text{зат}} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

Амплитуда затухающих колебаний заряда имеет вид:

$$q = q_0 e^{-\beta t}$$

Период затухающих электромагнитных колебаний

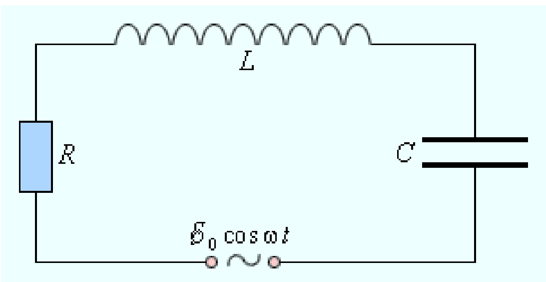
$$T_{\text{зат}} = \frac{2\pi}{\omega_{\text{зат}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}}$$

84. Вынужденные колебания в колебательном контуре под действием гармонической силы.

Вынужденные колебания – колебания, происходящие под воздействием внешних периодических сил.

Гармоническая сила – сила, изменяющаяся по гармоническому закону, то есть по закону синуса или косинуса.

Вынужденные колебания в RLC-контуре возникают при добавлении в него ЭДС, изменяющегося по гармоническому закону. В таком контуре со временем установятся вынужденные колебания с частотой, равной частоте генератора. Подвод энергии от внешнего источника будет в точности компенсировать потерю энергии на сопротивлении.



По 2-му правилу Кирхгофа:

$$-U_L + U_R + U_C = \mathcal{E}_B$$

$$L\frac{dI}{dt} + IR + \frac{q}{C} = \mathcal{E}_0 cos\omega t$$

Так как $I = \frac{dq}{dt}$,

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta\frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \mathcal{E}_0 cos\omega t - \text{уравнение вынужденных колебаний}$$

$$\beta = \frac{R}{2L} - \text{коэффициент затухания,}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} - \text{частота незатухающих свободных колебаний}$$

в отсутствии потерь энергии в колебательной системе

Если частота ω_0 свободных колебаний определяется параметрами электрической цепи, то установившиеся вынужденные колебания происходят на частоте ω внешнего источника.

Уравнение установившихся вынужденных колебаний:

$$q = q_o \cos(\omega t - \psi),$$

ψ

$-$ разность фаз колебаний заряда конденсатора и вынуждающей ЭДС источника.

85. Формулы для амплитуды и фазы.

Амплитуда установившихся вынужденных колебаний заряда конденсатора:

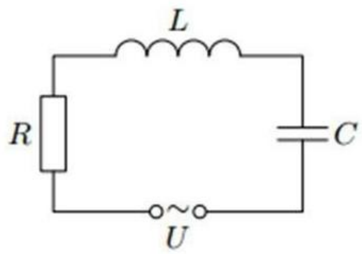
$$q_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{L\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta\omega^2}} = \frac{\mathcal{E}_0}{\omega\sqrt{\left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2 + R^2}}$$

Выражая разность потенциалов на обкладках конденсатор через заряд, получим:

$$U = \frac{q}{c} = \frac{\mathcal{E}_0 \cos(\omega t + \psi)}{LC\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta\omega^2}} = C\frac{\mathcal{E}_0 \cos(\omega t + \psi)}{\omega\sqrt{\left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2 + R^2}}$$

Фаза: $tg\psi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$

Разность фаз колебаний заряда конденсатора и вынуждающей ЭДС источника тока:



колебательный контур с резистором

$$\psi = arctg\,\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = arctg\,\frac{R}{\frac{1}{\omega C} - \omega L}$$

Разность фаз между силой тока и напряжением в цепи:

$$tg\psi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

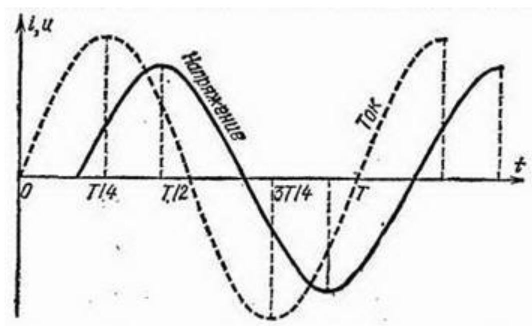
Амплитуда вынужденных колебаний зависит от соотношения между циклическими частотами вынуждающего воздействия ω и собственных колебаний ω_0. Резонансная частота и резонансная амплитуда:

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

$$q_{0_{\text{рез}}} = \frac{\mathcal{E}_0}{2L\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

Закон изменения тока: $I = \frac{dq}{dt} = \frac{\omega\mathcal{E}_0\cos\left(\omega t + \psi + \frac{\pi}{2}\right)}{LC\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta\omega^2}} = C\,\frac{\omega\mathcal{E}_0\cos\left(\omega t + \psi + \frac{\pi}{2}\right)}{\omega\sqrt{\left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2 + R^2}}$

Сдвиг фаз между напряжением и током определяется только параметрами нагрузки и не зависит от параметров тока и напряжения в цепи.



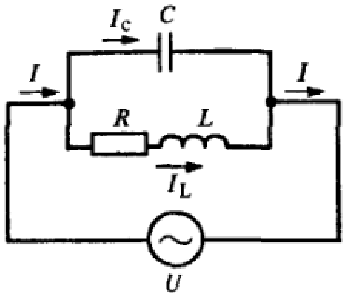
86. Резонанс токов.

Резонанс токов – явление возрастания тока, происходящее в параллельном колебательном контуре, при его подключении к источнику напряжения, колебательная частота которого совпадает с резонансной частотой контура.

Рассмотрим приведенную цепь (*206*). Сила тока, текущего в цепи, равна:

$$I = I_L + I_C = U\left(\frac{1}{R + i\omega L} + i\omega C\right) =$$

$$= U\,\frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} - i\,\frac{U}{R^2 + \omega^2 L^2}\left[\omega L - \omega C(R^2 + \omega^2 L^2\right]$$

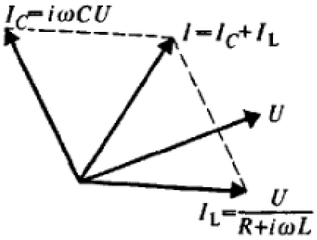


206

Цепь, в которой осуществляется резонанс токов

Следовательно, при условии $\omega L - \omega C(R^2 + \omega^2 L^2) = 0$ цепь ведет себя как чисто омическое сопротивление. Сдвиг фаз между внешним напряжением и силой тока равен нулю. Разделив все челны вышеприведенного уравнения на $\omega^2 LC$, получим

$$\frac{1}{\omega C} - \omega L = \frac{R^2}{\omega L}$$

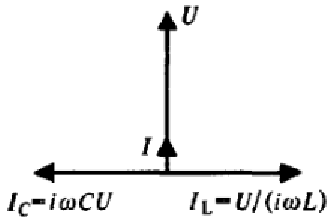


207

Векторная диаграмма токов в цепи с параллельными емкостью и индуктивностью

В большинстве практически важных случаев соблюдается условие $\omega L \gg R$, поэтому решение двух первых уравнений может быть представлено в виде: $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ – резонансная частота контура

При резонансной частоте импеданс достигает максимума, а сила тока в цепи – минимума. Однако реактивные силы тока при этом не являются минимальными. При приближении к условиям резонанс диаграмма токов принимает вид (*208*). Таким образом, внутри контура с реактивными элементами циркулируют очень большие токи (превышающими общий ток в $\frac{R}{\sqrt{\frac{L}{C}}}$ раз) по сравнению



208

Векторная диаграмма токов при резонансе токов

с токами, которые подводятся ко всему контуру. Заряд внутри контура с реактивными элементами протекает от емкости к индуктивности и наоборот, т.е. в этом контуре происходит колебание силы тока. В резонансе друг с другом находятся силы токов в емкости и индуктивности. Они компенсируют друг друга.

87. Опишите и обоснуйте метод комплексных амплитуд.

Комплексная величина, модуль и аргумент которой равны соответственно амплитуде и начальной фазе колебаний, называется *комплексной амплитудой*. Т.к. над выражениями вида $a(t) = Acos(wt + \varphi)$ неудобно производить арифметические операции, их можно представить в виде:

$$a(t) = Re\left(Ae^{i(\omega t+\varphi)}\right) = Re\left(Ae^{i\varphi}e^{i\omega t}\right) = Re\left(\hat{A}e^{i\omega t}\right),$$

$$\hat{A} = Ae^{i\varphi} - \text{комплексная амплитуда}$$

Таким образом вводятся комплексные амплитуды ЭДС источника и искомых токов. Пользуясь обычными правилами Кирхгофа, можно составить систему уравнений для комплексных амплитуд:

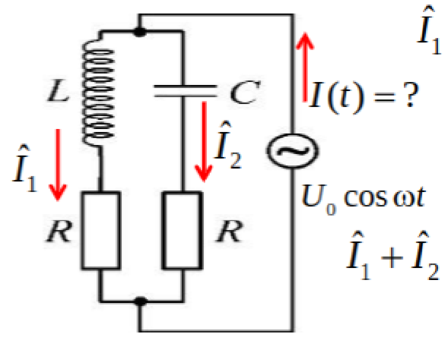
$$\hat{U}_R = \hat{I}R, \qquad \hat{U}_C = \frac{\hat{I}}{i\omega C}, \qquad \hat{U}_L = \hat{I}\omega L$$

Или $\hat{U} = \hat{I}Z$, где Z – комплексное сопротивление (импеданс).

$$Z = Z_R + Z_C + Z_L = R + \frac{1}{i\omega C} + i\omega L$$

Пример:

Законы Кирхгофа и метод комплексных амплитуд



$$\hat{I}_1 = \frac{U_0}{R + i\omega L} \qquad \hat{I}_2 = \frac{U_0}{R + 1/i\omega C}$$

$$I(t) = \mathrm{Re}\left\{(\hat{I}_1 + \hat{I}_2)\exp(i\omega t)\right\}$$

$$\hat{I}_1 + \hat{I}_2 = U_0 \frac{2R + i(\omega L - 1/\omega C)}{(R + i\omega L)(R + 1/i\omega C)}$$

$$I(t) = U_0 \frac{\sqrt{4R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}{\sqrt{(R^2 + L/C)^2 + R^2(\omega L - 1/\omega C)^2}} \times$$

$$\times \cos\left\{\omega t - \mathrm{arctg}(\omega L/R) + \mathrm{arctg}(1/\omega RC) + \mathrm{arctg}\left(\frac{\omega L - 1/\omega C}{2R}\right)\right\}$$

88. Что такое эффективные значения силы тока и напряжения? Запишите формулу для мощности переменного тока.

Для подсчета количества теплоты Q, выделяющейся при прохождении переменного тока по проводнику с активным сопротивлением R, нельзя использовать максимальное значение мощности, так как оно достигается только в отдельные моменты времени.

Эффективный ток (напряжение) – это величина постоянного тока (напряжения), действие которого произведет такую же работу, что и рассматриваемый переменный ток (напряжение) за время одного периода.

Выведем формулы для эффективных тока и напряжения.

Пусть

$$U = U_0 cos\omega t$$

$$I = I_0 \sin(\omega t - \varphi)$$

$$U(0) = 0, \qquad I(0) = -I_0 sin\varphi$$

Энергия, выделяемая за время dt:

$$dW = U_0 I_0 sin(\omega t) sin(\omega t - \varphi)dt \to W = \frac{1}{2} I_0 U_0 cos\varphi$$

В последней сумме суммирование по периоду дает 0, т.к. половину периода косинус имеет положительные значения, а половину - отрицательные.

$$P = \frac{W}{T} = \frac{1}{2} I_{eff} U_{eff} cos\varphi = \frac{1}{2} I_{eff}^2 R = \frac{1}{2R} U_{eff}^2 \to$$

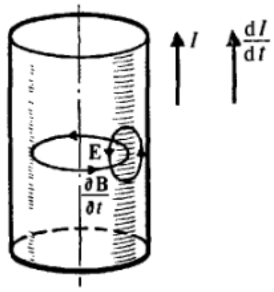
$$I_{eff} = \frac{1}{2} I_0, \qquad U_{eff} = \frac{1}{2} U_0$$

89. В чем заключается скин-эффект? Чему равна толщина скин-слоя в простейших случаях?

Постоянный ток распределяется равномерно по поперечному сечению прямолинейного проводника. У переменного, тока благодаря индукционному взаимодействию различных элементов тока между собой происходит перераспределение плотности тока по поперечному сечению проводника, в результате чего ток сосредотачивается преимущественно в поверхностном слое проводника. Концентрация переменного тока вблизи поверхности проводника называется *скин-эффектом*.

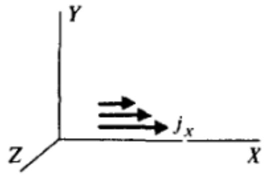
Скин-эффект - эффект уменьшения амплитуды электромагнитных волн при их проникновении вглубь проводящей среды. В результате этого эффекта, переменный ток высокой частоты при протекании по проводнику, распределяется не равномерно по сечению, а преимущественно в поверхностном слое.

Рассмотрим цилиндрический проводник, по которому течет ток. Вокруг проводника с током имеется магнитное поле, силовые линии которого являются концентрическими окружностями с центром на оси проводника. В результате увеличения силы тока возрастает индукция магнитного поля, а форма силовых линий при этом остается прежней. Поэтому в каждой точке внутри проводника производная $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ направлена по касательной к линии индукции магнитного поля и, следовательно, линии ее также являются окружностями, совпадающими с линиями индукции магнитного поля. Изменяющееся



223

Физическая картина возникновения скин-эффекта



224

Скин-эффект в бесконечном проводнике с плоской границей

магнитное поле по закону электромагнитной индукции $rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ создает электрическое индукционное поле, силовые линии которого представляют замкнутые кривые вокруг линии индукции магнитного поля. Вектор напряженности индукционного поля в более близких к оси проводника областях направлен противоположно вектору напряженности электрического поля, создающего ток, а в более дальних – совпадает с ним. В результате плотность тока уменьшается в приосевых областях и увеличивается вблизи поверхности проводника, т.е. возникает скин-эффект.

У переменного тока благодаря индукционному взаимодействию различных элементов тока между собой происходит перераспределение плотности тока по поперечному сечению проводника, в результате чего ток сосредотачивается преимущественно в поверхностном слое проводника.

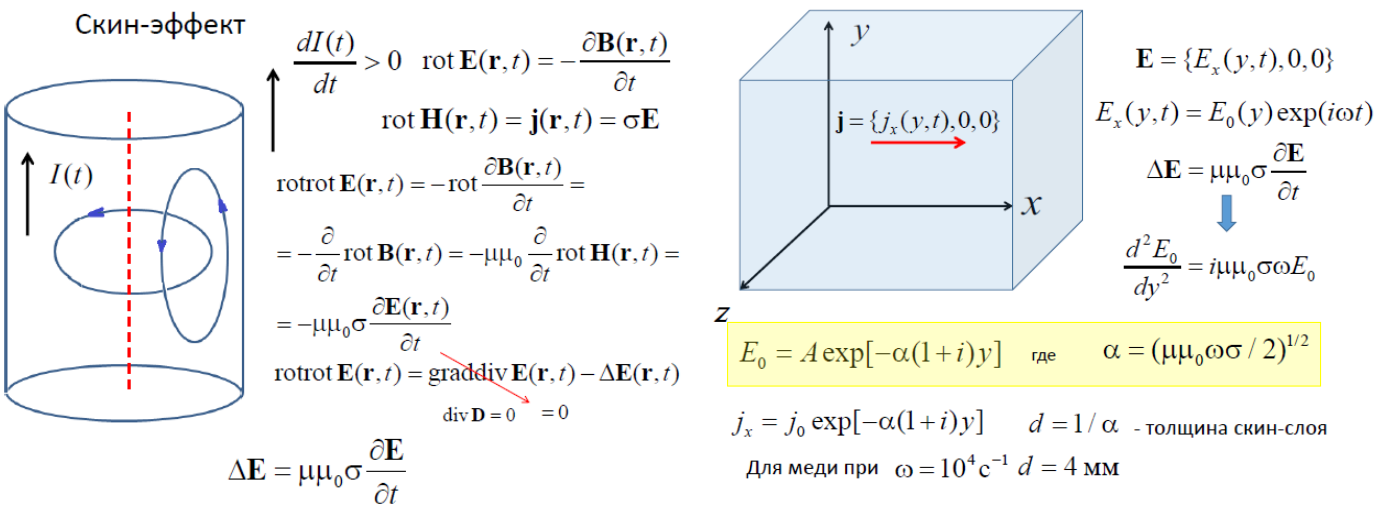
Объемная плотность тока максимальна у поверхности проводника. При удалении от поверхности она убывает и на расстоянии $\Delta = \frac{1}{\alpha}$ становится меньше в е раз. Поэтому практически весь ток сосредоточен в слое Δ, называемой *толщиной скин-слоя* – глубина, на которой объемная плотность тока становится в e раз меньше, чем на поверхности.

$$\Delta = \left[\frac{2}{\lambda\mu\omega}\right]^{\frac{1}{2}}$$

λ — удельная проводимость,

μ — магнитная проницаемость, ω — частота

Вывод.



90. ***Сформулируйте и запишите закон сохранения импульса для частиц в электромагнитном поле.***

ЗСИ. В изолированной системе поле-заряды полный импульс, равный релятивистскому импульсу заряженных частиц и импульсу электромагнитного поля, сохраняется.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{d}{dt}\oint_V [\vec{D},\vec{B}]dV = 0$$

$\vec{p}$ – импульс частиц

$\vec{D}$ – индукция электрического поля

$\vec{B}$ – индукция магнитного поля

V – объем системы

91. ***Функция Лагранжа движущейся в электромагнитном поле заряженной частицы.***

$$L(\vec{r},\vec{v}) = \frac{m\vec{v}^2}{2} - q\varphi(\vec{r}) + q\vec{A}\vec{v}$$

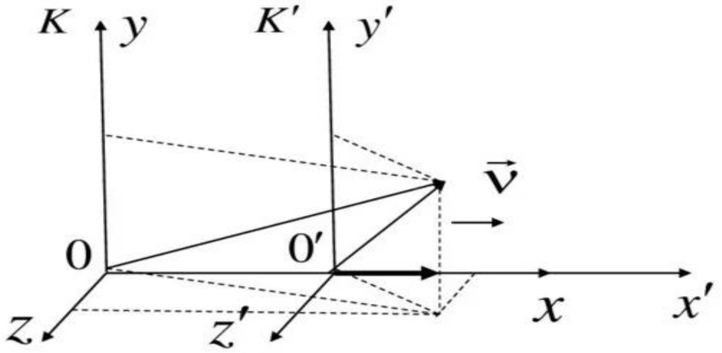
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = 0$$

$$\vec{A} - \text{векторный потенциал поля}$$

$$\vec{P} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = m\vec{v} + q\vec{A} - \text{обобщенный импульс}$$

92. Система уравнений Максвелла и преобразования Галилея.

Преобразования Галилея. Если инерциальная система отсчета (ИСО) движется относительно ИСО с постоянной скоростью вдоль оси, начала координат совпадают в начальный момент времени в обеих системах, то



$$x' = x + vt$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t' = t$$

Продифференцируем уравнения по времени, получим соответствующие уравнения преобразования скоростей:

$$\widehat{x'} = x' + v$$

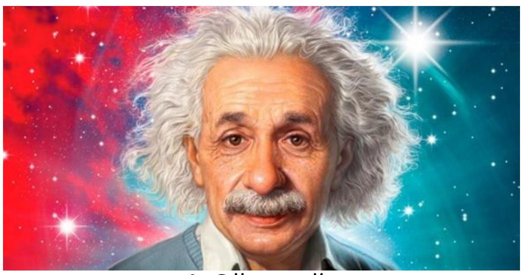
Электромагнитная волна движется со скоростью света, а скорость света – это абсолютная величина, то есть ее значение не зависит от системы отсчета, в которой она измеряется.

$\hat{c} = c + v$ – противоречие.

Уравнения Максвелла не инвариантны относительно преобразований Галилея (т.к. волны распространяются со скоростью света, которая постоянна во всех СО)

93. Постулаты теории относительности.

1) Все законы природы одинаковы в инерциальных системах отсчета (равномерное прямолинейное движение не оказывает влияния на физические



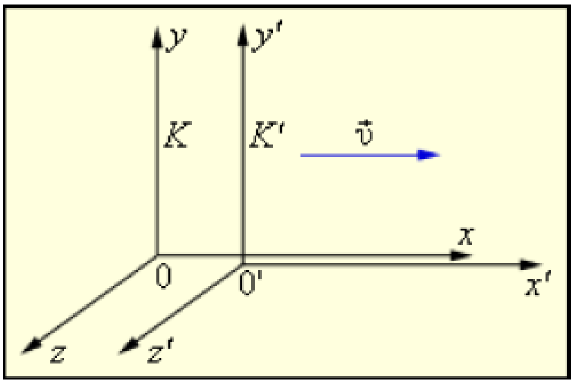
А. Эйнштейн

процессы и в любой инерциальной системе координат возникает одна и та же функциональная зависимость между величинами).

2) Любые взаимодействия между телами распространяются в пустоте с универсальной конечной скоростью, равной скорости света в пустоте, одинаковой во всех инерциальных системах отсчета.

94. Преобразования Лоренца.

Пусть имеются две системы отсчета Kи K', причем K движется относительно K' с постоянной скоростью $\vec{v}$ параллельно оси координат. При этом в системе K существует электрическое поле с напряженностью $\vec{E}$ и магнитное поле с напряженностью $\vec{H}$, а в системе K'– электрическое поле с напряженностью $\vec{E}'$ и индукцией $\vec{D}'$ и магнитное поле с напряженностью $\vec{H}'$ и индукцией $\vec{B}'$. Тогда формулы преобразования электромагнитных полей имеют вид:



$$E'_x = E_x, \qquad B'_x = B_x$$

$$E'_y = \frac{E_y - vB_z}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad B'_y = \frac{B_y - v\dfrac{E_z}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$E'_z = \frac{E_z - vB_y}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad B'_z = \frac{B_z - v\dfrac{E_y}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

95. Инвариантность уравнений электродинамики.

Назовем четырехвектором a_α совокупность четырех величин, которые при преобразовании Лоренца преобразуются по закону $a_\alpha = \gamma_{\alpha\beta} a'_\beta$, а четырехтензором второго ранга $A_{\alpha\beta}$ – совокупность шестнадцати величин таких, которые при указанном преобразовании изменяются по формулам $A_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\delta}\gamma_{\beta\mu} A\delta\mu$.

$$\gamma_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & 0 & 0 & \dfrac{-iv/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{iv/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & 0 & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \end{pmatrix}$$

Четырехвектор

$$r_\alpha = \{x, y, z, ict\}, \alpha = 1, \dots, 4$$

$$r_\alpha r_\alpha = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0 - const$$

Переход от x', y', z', t' к x, y, z, t полностью эквивалентен повороту вектора r_α в четырехмерном пространстве с матрицей перехода $\gamma_{\alpha\beta}$.

$$r_\alpha = \gamma_{\alpha\beta} r'_\beta$$

$$x = \gamma_{11} x' + \gamma_{14} ict' \rightarrow x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$ict = \gamma_{41} x' + \gamma_{44} ict' = \frac{iv}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} x' + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} ict' \rightarrow t = \frac{t' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Существует и обратное преобразование: $r'_\alpha = \tilde{\gamma_{\alpha\beta}} r_\beta$

Важные свойства:

- свойство матрицы $\gamma_{\alpha\beta}$: $\gamma_{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\rho} = \delta_{\beta\rho}$
- квадрат длины четырехвектора $r_\alpha = \{x, y, z, ict\}$ является инвариантом:

$$r_\alpha^2 = \gamma_{\alpha\beta} r'_\beta \gamma_{\alpha\rho} r'_\rho = \delta_{\beta\rho} r'_\beta r'_\rho = {r'_\beta}^2 = r'^2_\alpha$$

Приложим описанные свойства четырехвектора к уравнениям релятивистской электродинамики.

Введем четырехвектор тока $j_\alpha = \{j_x, j_y, j_z, ic\rho\}$

Уравнение непрерывности запишется в релятивистки инвариантном виде:

$$\frac{\partial j_\alpha}{\partial r_\alpha} = 0$$

$$r_\mu = \gamma_{\mu\alpha} r'_\alpha \qquad j'_\alpha = \tilde{\gamma}_{\alpha\beta} j_\beta \qquad \partial / \partial r'_\alpha = \partial / \partial r_\mu \, \gamma_{\mu\alpha}$$

$$\frac{\partial}{\partial r'_\alpha} j'_\alpha = \frac{\partial}{\partial r_\mu} \gamma_{\mu\alpha} \, \tilde{\gamma}_{\alpha\beta} j_\beta = \frac{\partial}{\partial r_\mu} \delta_{\mu\beta} j_\beta = \frac{\partial}{\partial r_\beta} j_\beta$$

$$j_\alpha = \gamma_{\alpha\beta} j'_\beta \qquad j_x = \frac{j'_x + v\rho'}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} \qquad j_y = j'_y \qquad j_z = j'_z$$

$$ic\rho = \frac{j'_x (iv / c)}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} + \frac{ic\rho'}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} \qquad \rho = \frac{j'_x (v / c^2) + \rho'}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$

Уравнения для векторного и скалярного потенциалов электромагнитного поля:

$$\Delta\vec{A} - \mu\mu_0\varepsilon_0\varepsilon\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\mu\vec{j}(\vec{r},t)$$

$$\Delta\varphi - \mu\mu_0\varepsilon_0\varepsilon\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho(\vec{r},t)}{\varepsilon_0\varepsilon}$$

СГС:

$$A \to \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} A, \qquad j \to (4\pi\varepsilon_0)^{\frac{1}{2}} j, \qquad \varphi \to (4\pi\varepsilon_0)^{-\frac{1}{2}}\varphi, \quad \rho \to (4\pi\varepsilon_0)^{\frac{1}{2}}\rho$$

$$\Delta\vec{A} - \frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\,\vec{j}(\vec{r},t)$$

$$\Delta\varphi - \frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho(\vec{r},t)$$

Четырехвектор потенциала $A_\alpha = \{A_x, A_y, A_z, i\varphi\}$

Все уравнения Максвелла можно свести к одной красивой формуле для вакуума

$$\frac{\partial^2 A_\alpha}{\partial r_\mu^2} = -\frac{4\pi}{c} j_\alpha$$

– релитивистки инваритная форма записи уравнений Максвелла

$$\frac{\partial^2 A'_\alpha}{\partial r'^2_\mu} = -\frac{4\pi}{c} j'_\alpha$$

$$\partial / \partial r'_\mu = \partial / \partial r_m \ \gamma_{m\mu} \qquad A'_\alpha = \tilde{\gamma}_{\alpha\beta} A_\beta \quad j'_\alpha = \tilde{\gamma}_{\alpha\beta} j_\beta \quad r_\mu = \gamma_{\mu\alpha} r'_\alpha$$

$$\frac{\partial}{\partial r_m}\gamma_{m\mu}\frac{\partial}{\partial r_n}\gamma_{n\mu}\tilde{\gamma}_{\alpha\beta}A_\beta = -\frac{4\pi}{c}\tilde{\gamma}_{\alpha\beta}j_\beta$$

$$\frac{\partial}{\partial r_m}\frac{\partial}{\partial r_n}\delta_{mn}\tilde{\gamma}_{\alpha\beta}A_\beta = \frac{\partial^2}{\partial r_m^2}\tilde{\gamma}_{\alpha\beta}A_\beta = -\frac{4\pi}{c}\tilde{\gamma}_{\alpha\beta}j_\beta$$

$$\gamma_{\sigma\alpha}\frac{\partial^2}{\partial r_m^2}\tilde{\gamma}_{\alpha\beta}A_\beta = -\frac{4\pi}{c}\gamma_{\sigma\alpha}\tilde{\gamma}_{\alpha\beta}j_\beta \qquad \gamma_{\sigma\alpha}\tilde{\gamma}_{\alpha\beta} = \delta_{\sigma\beta}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r_m^2}A_\sigma = -\frac{4\pi}{c}j_\sigma$$

Преобразование потенциала $A_\alpha = \{A_x, A_y, A_z, i\varphi\}$

$$A_\alpha = \gamma_{\alpha\beta}A'_\beta$$

$$\gamma_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & 0 & 0 & \frac{-iv/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{iv/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \end{pmatrix} \qquad A_x = \frac{A'_x + (v/c)\varphi'}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad A_y = A'_y \quad A_z = A'_z \quad \varphi = \frac{(v/c)A'_x + \varphi'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

В вакууме

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A} \qquad \mathbf{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$$

Построим антисимметричный четырехтензор

$$F_{\alpha\beta} = \frac{\partial A_\beta}{\partial r_\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial r_\beta}$$

← *из четырехвектора потенциала можно получить все основные формулы электродинамики*

$$F_{11} = \frac{\partial A_1}{\partial r_1} - \frac{\partial A_1}{\partial r_1} = 0 \qquad F_{22} = F_{33} = F_{44} = 0$$

$$F_{12} = \frac{\partial A_2}{\partial r_1} - \frac{\partial A_1}{\partial r_2} = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = (\mathrm{rot}\,\mathbf{A})_z = H_z \qquad \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

$$F_{13} = \frac{\partial A_3}{\partial r_1} - \frac{\partial A_1}{\partial r_3} = \frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} = -(\mathrm{rot}\,\mathbf{A})_y = -H_y$$

$$F_{14} = \frac{\partial A_4}{\partial r_1} - \frac{\partial A_1}{\partial r_4} = \frac{i\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{ic\partial t} = i(\mathrm{grad}\,\varphi)_x + \frac{i}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} = -iE_x$$

$$F_{23} = \frac{\partial A_3}{\partial r_2} - \frac{\partial A_2}{\partial r_3} = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = (\mathrm{rot}\,\mathbf{A})_x = H_x$$

$$F_{24} = \frac{\partial A_4}{\partial r_2} - \frac{\partial A_2}{\partial r_4} = \frac{i\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{ic\partial t} = i(\mathrm{grad}\,\varphi)_y + \frac{i}{c}\frac{\partial A_y}{\partial t} = -iE_y$$

$$F_{34} = \frac{\partial A_4}{\partial r_3} - \frac{\partial A_3}{\partial r_4} = \frac{i\partial\varphi}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{ic\partial t} = i(\mathrm{grad}\,\varphi)_z + \frac{i}{c}\frac{\partial A_z}{\partial t} = -iE_z$$

Все ссылки на учебники можно найти в учебнике Нетребко Н.В. и соавторов «Электричество и магнетизм», при составлении сего документа использовались слайды лекций Макарова В.А. в поддержку курса «Электричество и магнетизм».